Optimalizace měření v geodetických sítích

Ing. Ondřej Michal,
prof. Ing. Martin Štroner, Ph.D.,
katedra speciální geodézie, Fakulta stavební,
České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt

Optimalizace geodetických sítí je v současnosti důležité téma geodézie. Optimalizace je kategorizována do čtyř řádů: nultý se zabývá výběrem referenčního systému, první konfigurací sítě, druhý vahami použitých měření a třetí optimálním vylepšením sítě. V inženýrské geodezii je podstatný zejména design druhého řádu, neboť přesné sítě jsou řešeny jako volné a optimalizovat je tedy možné pouze váhy jednotlivých měření. Mnoho vědeckých prací, které se touto oblastí zabývají, řeší problém čistě z matematického pohledu a jejich výsledky jsou obtížně aplikovatelné v praxi. Nově vyvinutá metoda optimalizace je založená na výběru měření, které nejvíce vylepšuje nejhorší bod sítě. Tato metoda požadavky na aplikovatelnost v praxi naplňuje a byla úspěšně testována na velkém počtu různých typů geodetických sítí.

Optimization of Measurements in Geodetic Networks

Abstract

Optimization of geodetic networks is currently an important theme of the geodesy. It is categorized into four orders: the zero one deals with coordinate system selection, the first one with the network configuration, the second one with weights and the third one with the improvement of the existing network. In the engineering surveying the second order design is particularly important, because precise networks are developed as free and therefore only the weights of individual measurements can be optimized. Many scientific papers dealing with optimization solve the problem mostly only from mathematical point of view and its results are difficult to apply in practice. Newly developed optimization method is based on selecting such a measurement that is the most beneficial for the worst point in the network and fulfils practical application requirements. It was successfully tested on the large number of different types of geodetic networks.

Keywords: *second order design, number of repetition, engineering surveying*

1. Úvod

Navrhování a zaměřování geodetických sítí je nedílnou součástí dnešní geodetické praxe. Zejména u přesných prací při velkých inženýrských projektech tvoří její vybudování a udržování nemalou část nákladů na geodetická měření, a zároveň na kvalitě výsledku závisí kvalita veškerých následně provedených geodetických prací.

Z ekonomických důvodů je zde vždy snaha tyto náklady minimalizovat, zároveň ale musí být dodržena požadovaná přesnost a spolehlivost sítě. Metody optimalizace by měly umožnit minimalizaci nákladů při zachování požadované přesnosti (případně maximalizaci přesnosti při zachování nákladů).

Optimalizačních metod existuje velké množství, ale jen některé mohou být použity na matematicky relativně komplikovaný problém geodetických sítí. Ve větší míře se optimalizace geodetických sítí začala vědecky zkoumat až s nástupem výpočetní techniky v šedesátých letech 20. století. Od té doby byly zkoumány různé způsoby optimalizace, jejich praktické užití je však minimální, neboť jejich aplikace je většinou velmi komplikovaná. V tomto textu budou shrnuty důvody malého užití optimalizace geodetických sítí v praxi a bude předvedena nová metoda, která by většinu těchto problémů měla uspokojivě řešit. Metoda byla úspěšně testována na konkrétních příkladech geodetických měření, konkrétně na geometrické nivelaci ze středu a geodetické síti určované pomocí samostatných vektorů globálních navigačních družicových systémů (GNSS).

2. Současný stav problematiky

Optimalizace měření v geodetických sítích je úzce specializovanou úlohou, jejíž základy nejsou příliš známy, proto je vhodné je před samotnou rešerší alespoň ve stručnosti shrnout, aby byl následný text dostatečně přehledný.

2.1 Stručný úvod do problematiky

Optimalizací obecně rozumíme hledání ideálního řešení daného problému na základě vlastností tohoto problému a předem stanovených kritérií. Nejprve je tedy nutné vysvětlit některé základní pojmy. V této kapitole bude čerpáno zejména z [1], další zdroje jsou případně citovány u konkrétních odstavců.

Objektivní funkce
Z matematického pohledu se jedná o hledání globálního maxima nebo minima určité funkce, v literatuře většinou nazývané objektivní (objektovou) funkcí (objective function). Optimalizační metodou je například i metoda nejmenších čtverců, kde jsou objektivní funkcí vážené kvadráty oprav.

Objektivní funkce lze obecně rozdělit na dva typy:

- Single-Objective Optimization Method (dále SOOM; Jednoparametrické optimalizační metody) – u kterých optimalizujeme pouze jeden parametr soustavy, ostatní jsou fixní.
- Multi-Objective Optimization Method (dále MOOM; Víceparametrické optimalizační metody) – u kterých optimalizujeme více parametrů zároveň.

- Porovnáním těchto typů optimalizací se podrobně zabývá [2], výrazně lepších výsledků je většinou dosahováno s MOOM.

V oblasti geodetických sítí obecnou objektivní funkci definoval německý geodet Schaffrin ve tvaru:

$$\alpha \cdot (přesnost) + \beta \cdot (spolehlivost) + \gamma \cdot (cena)^{-1} = max\,. \quad (1)$$

Jedná se tedy o objektivní funkci s více parametry – zároveň je optimalizována přesnost, spolehlivost a náklady na měřické práce. Koeficienty α, β a γ neboli váhy definují význam jednotlivých parametrů na výsledky.

Skalární objektivní funkce pro přesnost
Nejjednodušším případem objektivní funkce je funkce skalární. Určováním a zkoumáním vlastností skalárních objektivních funkcí pro optimalizaci přesnosti geodetické sítě se zevrubně zabýval již Grafarend [3]. Jako skalární funkce lze použít některou z číselných charakteristik kovarianční matice (norma, stopa, maximální vlastní číslo, determinant).

Výhodou těchto skalárních funkcí je snadné analytické řešení. Problém je přílišná obecnost skalárních objektivních funkcí, která nezaručuje výsledky pro jednotlivé body a ty tak mohou být ve výsledku nedostatečně přesné, přestože celkový požadavek na síť je splněn.

Maticové objektivní funkce pro přesnost
Grafarend společně se Shaffrinem proto ve svých dalších publikacích pracují s kovarianční maticí jako celkem, viz [4]. Protože optimalizace maticové funkce je náročný problém, postupovali zde opačně – nejprve definují optimální kovarianční matici a následně metody, jak k ní dospět. Uvedená optimální podoba kovarianční matice byla nazvána „Taylor-Karmanova“ struktura kovarianční matice, viz (2):

$$M_x = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & kov \\ kov & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Takový tvar zaručuje homogenitu a izotropii celé sítě. Přesnost všech bodů v síti je tedy shodná. Z definované kovarianční matice výsledků jsou pak inverzí vztahů metodou nejmenších čtverců (MNČ) dopočteny váhy jednotlivých měření.

Taylor-Karmanova struktura byla často používána v souvislosti s rozšířením výpočetní techniky, zejména u takových geodetických sítí, kde je požadavek na homogenitu a izotropii vysoký, jako jsou sítě pro sledování deformací při výstavbě velkých inženýrských objektů.

Výhodou metod využívajících Taylor-Karmanovu strukturu je opravdu optimální tvar kovarianční matice. Zároveň může tak vysoký požadavek na výsledný tvar matice být zdrojem silného nárůstu objemu měření, z nichž mnohá budou mít jen marginální přínos.

Objektivní funkce pro spolehlivost
Pojem spolehlivosti geodetických sítí byl matematicky definován v [5]. Rozlišují se zde pojmy vnitřní spolehlivost (schopnost odolávat chybám) a vnější spolehlivost (odhalení chyb statistickou analýzou MNČ). Oba typy spolehlivosti jsou závislé na tzv. redundantní matici $\boldsymbol{R}$ (redundancy matrix, matice přeurčenosti) která je popsána ve (3):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T)^{-1}\, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\,, \quad (3)$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice, $\boldsymbol{A}$ matice plánu, $\boldsymbol{P}$ váhová matice a $\boldsymbol{D}$ definuje připojení sítě; symbolika je dodržena v rámci celé práce. Redundantní matice je čtvercová matice, její rozměry odpovídají počtu měření v síti. Prvky na diagonále jsou čísla v intervalu (0,1) a udávají, jak odpovídající měření přispívá k přeurčenosti celé sítě. Součet prvků na diagonále (stopa redundantní matice) je pak roven počtu nadbytečných měření v celé síti.

Optimalizací spolehlivosti geodetických sítí se zabývá pouze velice úzká skupina autorů a v tomto textu se jí šíreji věnovat nebudeme.

Optimalizační kritéria
Hledání globálního extrému je sice hlavním úkolem optimalizačních úloh, ale u geodetických sítí ho není možné aplikovat přímo, protože objektivní funkce zde mívá globální extrém, který nemá praktický význam – přesnost bude maximální při nekonečném počtu opakování, náklady budou minimální při nulovém počtu opakování. Je nutné tedy do optimalizace doplnit kritéria, která musí být při řešení splněna (např. maximální směrodatná odchylka), aby výsledky měly praktický význam, případně využít víceparametrickou optimalizaci.

Optimalizované parametry
Optimalizace geodetických sítí začala být důležitým tématem v podstatě od okamžiku vzniku prvních sítí, u velkých státních trigonometrických sítí byla úspora nákladů při dosažení požadované přesnosti velmi důležitým aspektem. Avšak již malé sítě jsou matematickými nástroji i v dnešní době obtížně optimalizovatelné. Před rozvojem výpočetní techniky se tedy nejednalo o optimalizaci v pravém slova smyslu, ale spíše o navrhování sítě dle zkušeností a základních matematických pouček. Proto pojem optimalizace v oblasti geodetických sítí často splývá s designem (návrhem).

Grafarend v [3] rozlišuje dle optimalizovaných parametrů čtyři řády designu, které jsou většinou řešeny odděleně, jejich vlastnosti jsou shrnuty v **tab. 1**.

Tab. 1 Optimalizované parametry designů 0. až 3. řádu

Řád designu	Optimalizované parametry	Fixované parametry	Popis
0.	M_x	$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$	Zero order design (ZOD) optimální připojení sítě [6]
1.	$\boldsymbol{A}$	M_x, $\boldsymbol{P}$	First order design (FOD) optimální konfigurace sítě
2.	$\boldsymbol{P}$	M_x, $\boldsymbol{A}$	Second order design (SOD) optimální váhy měření
3.	Částečně $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{P}$	M_x, částečně $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{P}$	Third order design (THOD) optimální vylepšení sítě [7]

Kde $\boldsymbol{M}_x$ je kovarianční matice sítě, $\boldsymbol{A}$ matice plánu a $\boldsymbol{P}$ váhová matice. V literatuře je řešen zejména design prvního a druhého řádu, který by měl na praktické měření v terénu teoreticky největší dopad.

Optimalizační metody
Optimalizační metodou rozumíme matematický či myšlenkový aparát, který vede k nalezení optimálního řešení. Obecně můžeme optimalizační metody rozdělit do několika příbuzných skupin:

- Optimalizační algoritmy – např. simplexový algoritmus,
- Iterativní metody – např. MNČ,
- Heuristické metody – často založeny na napodobení přírodního jevu (optimalizace hejnem části, metoda simulovaného žíhání, apod).

Optimalizační algoritmy a iterativní metody při správné aplikaci vždy dospějí k extrému objektivní funkce – není však zaručeno, že to bude extrém globální. Naproti tomu heuristické metody nezaručují optimálnost nalezeného řešení, ale pouze jedno z možných řešení, které je optimálnímu blízké. Většina těchto metod poskytuje zároveň s výsledkem mez, která udává maximální možný odklon řešení od optimálního. Jejich hlavní výhodou je výrazné snížení výpočetní náročnosti, tudíž i aplikace na složité, exaktně neřešitelné problémy.

2.2 Metody zabývající se designem 1. řádu

Praktická realizace designu 1. řádu, tedy přesuny bodů sítě na optimální pozici, je většinou téměř nemožná, konfigurace je dána podmínkami na místě, jedná se tedy spíše o akademický problém, jehož řešení bylo po nástupu totálních stanic, umožňujících levné, rychlé a přesné měření, marginalizováno. Z toho důvodu a vzhledem ke složitosti užitého matematického aparátu budou metody jen velmi stručně nastíněny, podrobnosti je třeba hledat přímo v původních článcích.

Nejcitovanější v oblasti designu 1. řádu je Kochova práce [8], která položila matematický základ pro většinu dalších výzkumů.

Koch zde představuje obecné řešení designu 1. řádu pomocí diferenciálních změn rozdílu souřadnic dvou bodů. Optimalizována je vzájemná konfigurace jednotlivých bodů sítě. Jako kritérium je zvolen speciální případ Taylor-Karmanovy struktury, jejíž prvky jsou funkcí výhradně vzdálenosti bodů. Pomocí diferenciálně malých změn souřadnic se tedy pokouší kriteriální matici aproximovat kovarianční maticí soustavy, přičemž stopa matice je fixována.

Odlišný přístup k designu 1. řádu přináší Berne a Baselga [9], kde optimalizaci řeší pomocí heuristické metody simulovaného žíhání (Simulated annealing), která je inspirována procesem krystalizace při ochlazování oceli, více o metodě [10] a [11]. Jako parametr použijí pouze skalární funkci – determinant kovarianční matice. Nejprve metodu testují na jednoduchém příkladu s předem známým řešením – ke kterému také dospějí. Ve druhém testovacím příkladu se jedná o složitější síť základen GNSS. Jako ve většině řešení FOD je nutné zavést hranice, které poloha optimalizovaných bodů nesmí překročit. V uvedeném příkladu pak dva ze tří optimalizovaných bodů na konci výpočtu leží právě na těchto hranicích.

2.3 Metody zabývající se designem 2. řádu

Pouze s ohledem na přesnost se optimalizací 2. řádu zabývá například Yetkin, Inal, a Yigit v [12], kde k optimalizaci využívají moderní heuristickou metodu optimalizace hejnem částic (Particle swarm algorithm, PSO), která k rychlejšímu vyhledání optimálního řešení využívá inspiraci ptačím hejnem – více o metodě v [13].

Autoři testují algoritmus na jednoduché síti základen GNSS a vypočítávají optimální váhy pro jednotlivé základny, přičemž se jim při dodržení požadované přesnosti podaří jednu základnu vyřadit. Algoritmus tedy u jednoduché sítě GNSS funguje, je však otázkou, jaké by byly výsledky u sítí složitějších.

Pouze spolehlivost sítě řeší v [14] Seemkooei – pomocí vlastního iterativního algoritmu optimalizuje minimální redundantní číslo (minimum na diagonále redundantní matice $\boldsymbol{R}$ (3)) tak, aby přínos všech měření v síti byl shodný – hodnoty na diagonále jsou shodné a jedná se o poměr počtu nadbytečných měření v sítí a celkového počtu měření. Funkčnost svého algoritmu prezentuje na dvou příkladech. Z výsledků je patrné, že i k malé změně redundantní matice je nutná velká změna vah, je tedy otázka, jestli zvýšení spolehlivosti dává ekonomický smysl.

Přesnost a zároveň spolehlivost optimalizuje stejný autor v [15], opět řeší design druhého řádu. Předpokládá měření více fyzikálních veličin (úhlů a délek), jež budou mít v drtivé většině situací rozdílnou přesnost a cílem je dosáhnout toho, že vliv těchto veličin na výslednou přesnost bude shodný.

V obou pracích výsledky odpovídají deklarovaným tvrzením. Výsledky uvedených výzkumů jsou z matematického pohledu korektní, je ovšem otázkou, zda budou takovéto nároky na spolehlivost někdy v praxi vyžadovány. Výraznějším problémem je pak přímá optimalizace vah, která je v praxi s běžnou technikou nerealizovatelná, neboť praktické měření probíhá s přístroji s konkrétní přesností, a váhy se tedy mohou měnit pouze skokově s počtem opakovaní měření, nikoli plynule, jak je uvažováno v těchto příkladech.

2.4 Kombinovaný design

Nejvýraznějších výsledků v této oblasti dosáhl Kuang, který souhrn svých poznatků publikoval ve své disertační práci [16]. Práce je díky svému rozsahu velmi podrobná a využitelná k pochopení základních poznatků optimalizace v geodetických sítích. Kuang se soustředí zejména na problematiku sítí pro sledování deformací. Rozšiřuje také množství kritérií, jež musí optimalizovaná síť plnit – zavádí a matematicky definuje pojem senzitivity geodetických sítí – nejmenší deformaci, jíž je možno prokazatelně odhalit.

V oblasti designu 1. řádu navazuje na Kocha – viz část 2.2, na příkladech však dokazuje, že postupné řešení 1. a 2. řádu není optimální a přichází s novým algoritmem, který optimalizuje polohu bodů i váhy měření zároveň. Podrobně rozebírá možnosti optimalizace některého z parametrů (přesnost, spolehlivost, …) zatímco zbylé jsou fixovány a shledává je nedostatečnými. Aplikuje tedy multi-objektivní optimalizaci (MOOM) dle vlastního návrhu. Funkčnost nové metody potvrzuje několika matematickými příklady. Na závěr přikládá tři rozsáhlé příklady včetně vstupních dat a výsledků.

Na prvním příkladu demonstruje možnost zakomponování negeodetických metod měření do sítě a její optimalizace a provádí na ní souběžný design 1. i 2. řádu. Ve druhém příkladu prezentuje výhodu víceparametrické kombinované optimalizace vůči postupnému řešení, objem měření po optimalizaci jeho algoritmem je výrazně nižší.

Ve zhodnocení výsledků Kuang poukazuje na velký vliv FOD na výslednou sumu vah při posunech bodů, které označuje za marginální. Ve skutečnosti většina výsledných posunů bodů po optimalizaci dosahuje hodnot stanovených jako maximální a je otázkou, zda by v praxi bylo možné s pozicemi bodů v síti takto volně pohybovat.

V posledním příkladu se důkladně věnuje rozsáhlé monitorovací síti. Protože se jedná o existující síť, může být proveden pouze design 2. řádu. Původní síť byla navržena jako trilaterační s 27 body a 176 měřenými délkami. Po aplikaci Kuangova algoritmu bylo 31 délek vyřazeno jako nadbytečných, bez vlivu na kvalitu výsledků. Jako návrh pro zpřesnění sítě pak Kuang doplňuje do sítě měření směrů, z 350 možných jich po optimalizaci do sítě doplňuje 36, po jejich doplnění klesne celková plocha elips chyb na polovinu.

Kuangův algoritmus je i v současnosti nejlépe fungujícím známým algoritmem řešícím všechny podstatné problémy optimalizace geodetických sítí. U 1. řádu je jeho největší slabinou velikost posunů jednotlivých bodů – u 3D sítě uvádí Kuang posuny ve výškové souřadnici v řádu desítek metrů, čehož není možné při realizaci sítě dosáhnout. V rámci designu 2. řádu je problém v práci přímo s vahami měření – jejich převedení na přesnost, jež může být použita, ovlivňuje optimálnost nalezeného řešení, neboť v praxi musíme vypočtenou váhu změnit na hodnotu dosažitelnou s konkrétním přístrojem a počtem opakování. Dalším problémem jsou oddělené observace různých veličin, což je v době totálních stanic neekonomické, to však lze přisoudit době vzniku tohoto algoritmu, kdy přesné měření délek a úhlů ještě probíhalo odděleně.

2.5 Optimalizace sítí v Československu

Optimalizací geodetických sítí se v rozmezí sedmdesátých až devadesátých let 20. století zabýval širší okruh autorů v tehdejším Československu. Základy těchto prací položil prof. Kubáček, souhrnně viz [20].

Optimalizaci druhého řádu pomocí algoritmů prof. Kubáčka teoreticky řeší [21]. Je zde optimalizována kovarianční matice pomocí libovolného skalárního kritéria (A-optimalita, D-optimalita minimax optimalita) jejichž přednosti a nevýhody autoři vyhodnocují. Optimalizační algoritmus je iterační a v každém kroku zvyšuje četnost takového měření, které v ten okamžik nejvíce přispívá ke zlepšení kritéria v rámci celé sítě. Zásadní roli zde hraje startovací plán, který definuje relativní počty měření. Jak sami autoři přiznávají, problémem optimalizace je samotné optimalizační kritérium, které je sice globálně optimální, avšak jednotlivé body mohou mít nevyhovující charakteristiky přesnosti, např. hlavní poloosu, a tedy optimalizace nesplní účel. Není zde také explicitně definováno kritérium přesnosti, které má být dosaženo z hlediska přesnosti výsledné geodetické sítě.

Kombinaci délkového a úhlového měření (která se v té době zaváděla do praxe) se zabývá [22]. Na jednoduchých příkladech s různou přesností úhlů a délek porovnává výsledné počty opakování těchto měření. Při praktickém měření optimalizované sítě však není dosaženo požadované přesnosti, přičemž vlivem malého počtu nadbytečných měření v optimalizované síti nemohla být chyba odhalena. Praktické užití optimalizace geodetické sítě prezentuje [23], kde je optimalizována vytyčovací síť pro stavbu mostu. Opět je použit algoritmus prof. Kubáčka. Na praktickém příkladu je vidět, že optimalizace vyžaduje erudovaného geodeta jak při tvorbě startovacího plánu, který může výsledky ovlivnit, tak při modifikaci matematicky optimální sítě pro geodetickou praxi – při které se optimalizované parametry sítě významně mění.

Vícekriteriální optimalizací se v [24] zabývá Pecár, který kombinuje A, D a L optimalitu včetně příkladu výpočtu.

3. Nová metoda optimalizace

Po seznámení s vlastnostmi v současnosti existujících optimalizačních metod bylo shledáno, že jejich použití v praktických případech inženýrské geodézie je velmi složité. Umístění bodů sítě je většinou jasně dané prostorovou situací v terénu a požadavky na využití sítě, design prvního řádu je tedy možné uplatnit pouze velmi zřídka a v mezích, ve kterých je vliv na parametry sítě velmi malý.

U designu 2. řádu je samozřejmě variabilita možná, nicméně většina výše uvedených optimalizačních metod pracuje přímo s vahami jednotlivých měření, případně s neceločíselnými počty opakování, přičemž realizovat každé měření v síti s určitou, ale prakticky libovolnou váhou danou reálným číslem, je v praxi nemožné. Váhu měření můžeme změnit pouze použitím jiného přístroje nebo jiným počtem opakování jednoho měření čili se váha mění nikoli spojitě, ale ve skocích. Pokud však neceločíselné počty opakování z výsledků optimalizace zaokrouhlíme, výsledné řešení již není optimální. Tato úprava se však přesto používala, označována jako „geodetická úprava vypočítaného matematicky optimálního plánu měření.

V žádné ze známých prací také není bráno v úvahu, že v dnešní geodetické praxi jsou všechny měřené veličiny určované totální stanicí odečítány zároveň a různý počet opakování jednotlivých veličin v rámci jedné záměry nepřinese žádnou časovou ani ekonomickou úsporu.

Proto byly určeny požadavky, které by měla nová optimalizační metoda pro navrhování geodetických sítí splňovat:

- Je řešen pouze design 2. řádu jakožto prakticky využitelný postup.
- Optimalizujeme celočíselné počty opakování jednotlivých měření.
- Veličiny měřené zároveň mají stejný počet opakování.

3.1 Návrh řešení

Výchozí myšlenka celého řešení spočívá v rozložení váhy měření do dvou složek – základní váhy, která je závislá pouze na přesnosti měření, a dále celočíselnému počtu opakování konkrétního měření n_i:

$$p_i = n_i \cdot \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \quad , \tag{6}$$

kde p_i je váha i-tého měření, σ_i je směrodatná odchylka i-tého měření a σ_0 je jednotková směrodatná odchylka. Převedeno do maticové podoby:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{P}_0 \,. \tag{7}$$

Kde $\boldsymbol{P}_0$ je váhová matice s váhami pro jedno opakování každého měření, $\boldsymbol{N}$ je diagonální matice obsahující počty opakování měření a $\boldsymbol{P}$ je výsledná váhová matice.

Směrodatné odchylky tedy mohou být nastaveny v souladu s přesností přístrojové techniky a s metodou měření a v rámci optimalizace budou zachovány. Během výpočtu se mění pouze celočíselné počty opakování konkrétních měření.

Jako optimalizační kritérium může být zvolena jakákoli charakteristika přesnosti odvozená z kovarianční matice sítě (např. maximální souřadnicová odchylka, polohová odchylka, poloosa elipsy chyb atd.). Tuto charakteristiku označme *K*. Jelikož řešíme design 2. řádu, konfigurace sítě je dána, kovarianční matice je tedy snadno vyčíslena jako:

$$\boldsymbol{M} = \sigma_0^2(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{N}\, \boldsymbol{P}_0\, \boldsymbol{A})^{-1}\ . \tag{8}$$

V rámci optimalizace tedy prohledáváme prostor řešení, který je tvořen všemi variacemi diagonály matice ***N***. Každé měření může být opakováno 0 až m-krát, přičemž m je nutné stanovit předem s ohledem na skutečný přínos vyššího počtu opakování v rámci použité metody měření. V rámci každého řešení je pak možné z kovarianční matice vyčíslit charakteristiku *K* a porovnat ji s mezním kritériem K_T. Protože hledáme řešení s minimálními náklady, za které lze pokládat celkový počet měření v síti, je optimem takové řešení, které splňuje zadané kritérium a zároveň má minimální počet opakování (součet prvků ***N***).

Pokud je omezen maximální počet opakování m, je celkový počet řešení konečný a optimum lze najít metodou „hrubé síly“ – pro každé jednotlivé řešení invertovat součin ($\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{N}\, \boldsymbol{P}_0\, \boldsymbol{A}$) a vyčíslit si *K*. Náročnost tohoto výpočtu však roste exponenciálně s počtem měření a pro sítě s větším počtem měření je nepoužitelný – například pro síť s 20 měřeními a maximálně 3 opakování je celkový počet možností $4^{20} \cong 1{,}1 \cdot 10^{12}$ a na běžném PC se počítá několik desítek hodin.

Metoda maximálního přírůstku přesnosti

Proto byla navržena nová optimalizační metoda, která neprohledává prostor řešení náhodně, ale po krocích dle předem stanoveného předpisu. Počet opakování všech měření je na počátku výpočtu nulový, pro potřeby výpočtu (regularity inverze v (8)) jsou 0 nahrazeny nenulovými hodnotami ε, které jsou voleny tak, aby měly zanedbatelný vliv na výsledky výpočtu (cca 10^{-12}):

$$\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{N}) = (n_1 \ldots n_m) = (\varepsilon \ldots \varepsilon)\ . \tag{9}$$

Počty opakování jednotlivých měření jsou postupně zvyšovány tak, aby maximálně vylepšily nejhorší charakteristiku sítě. Nejhorší charakteristika je vybírána tak, že je vypočtena kovarianční matice $\boldsymbol{M}_x$ a následně je vypočtena charakteristika pro každý bod sítě. Z nich je vybrána nejhorší charakteristika K_w. Následně jsou postupně o jednu zvyšovány počty všech měření a postupně vyčíslovány nové charakteristiky nejhoršího bodu $K_{w,ni+1}$. Z těchto charakteristik je pak vybrána ta, která nejvíce vylepšuje původní hodnotu K_w, tedy:

$$\max_i (K_w - K_{w,ni+1}) \tag{10}$$

a i-tému měření je zvýšen počet opakování o jedna. Tento proces je opakován dokud $K_w > K_T$.

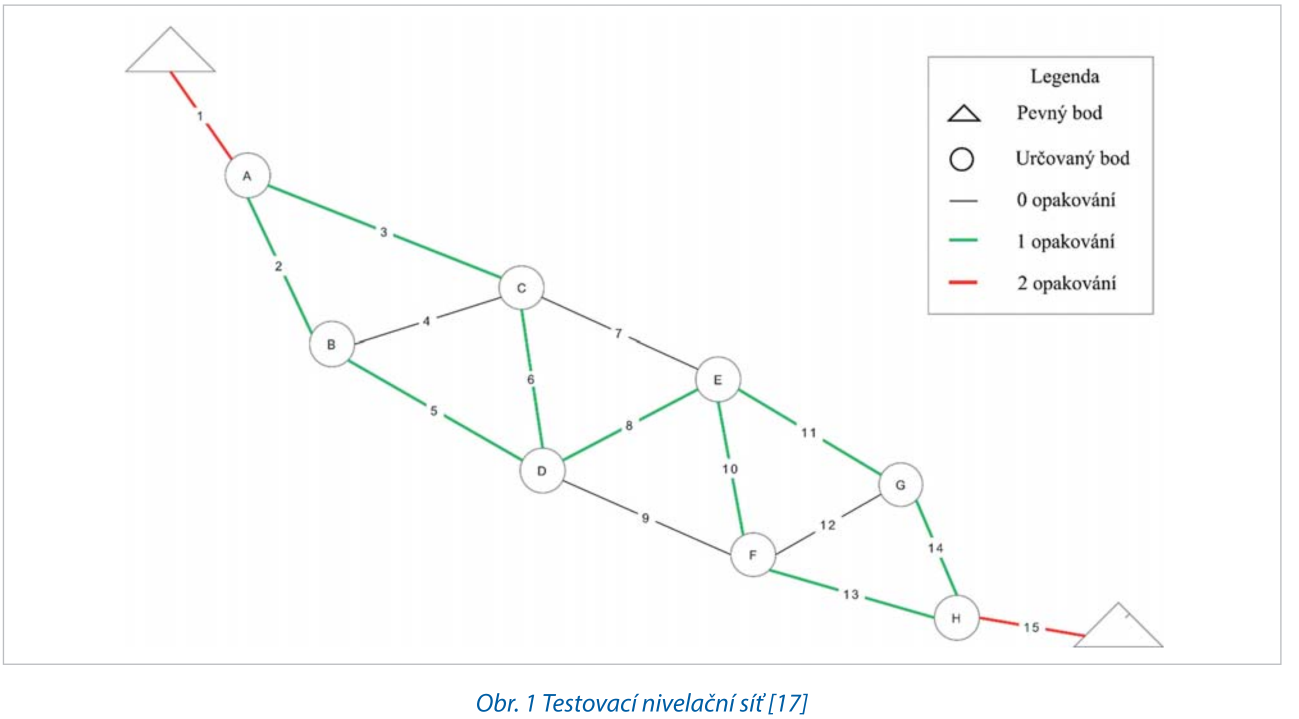
Pokud celkový počet opakování měření označíme N = = sum(***N***), pak je celkový počet kroků výpočtu *N* · m, což je řádově nižší počet než u optimalizace „hrubou silou“, navíc s velikostí sítě roste počet kroků lineárně a metoda je v konečném čase řešitelná i pro velké sítě.

3.2 Experimentální ověření metody

Metoda byla experimentálně prověřena aplikací na různé nivelační sítě. Nivelace byla zvolena pro snadnou implementaci, menšímu počtu měření v síti a možnosti snadno zhodnotit výsledky optimalizace.

Test byl proveden mimo jiné na větší síti znázorněné na obr. 1. Přesnost měřeného převýšení byla nastavena na 1 mm, požadovaná přesnost určovaných bodů byla 1,1 mm.

Výsledky optimalizace jsou přehledně znázorněny na obr. 1. Celkem 4 měření byla ze sítě zcela vypuštěna, 9 měření by mělo být provedeno jednou a připojovací mě-



Obr. 1 Testovací nivelační síť [17]

ření k oběma pevným bodům by měla být provedena 2krát. Celkový počet měření v síti je tedy 13.

Byl proveden kontrolní výpočet „hrubou silou", kterým, byly nalezeny 4 varianty řešení, které splňovaly požadované kritérium při provedení 13 měření, jedno z nich bylo výsledkem popsané optimalizační metody, která funguje korektně, stejně jako u všech testů na jednoduchou nivelační síť.

Základní funkčnost nové optimalizační metody byla prokázána v předchozích odstavcích, avšak pouze pro velmi zjednodušené příklady. Proto byl další prezentovaný testovací příklad již volen tak, aby odpovídal podmínkám při skutečném měření, kdy jsou délky jednotlivých pořadů různé a mají tedy i různou přesnost. Požadovaným kritériem byla opět přesnost výšek určovaných bodů, hodnotícím parametrem optimalizace ale nikoliv celkový počet opakování, nýbrž celková nivelovaná vzdálenost.

Příklad testované sítě je znázorněn na obr. 2. Délky jednotlivých pořadů (v km) jsou uvedeny zde:

$$\boldsymbol{d} = (0{,}1\ \ 0{,}2\ \ 0{,}1\ \ 0{,}3\ \ 0{,}3\ \ 0{,}2\ \ 0{,}5\ \ 0{,}6\ \ 0{,}2\ \ 0{,}1\ \ 0{,}6\ \ 0{,}3\ \ 0{,}6\ \ 0{,}2\ \ 0{,}3\ \ 0{,}2\ \ 0{,}2\ \ 0{,}4).$$

Jednotková kilometrová směrodatná odchylka převýšení byla opět stanovena na 1 mm, požadovaná přesnost výšek bodů 0,5 mm.

Počet opakování je znázorněn v obr. 3, zde je zřejmé, že navržená metoda vyřazuje delší, tudíž nákladnější a méně přesná měření. Celková nivelovaná vzdálenost je 3 km, což bylo „hrubou silou" potvrzeno jako optimální [17].

Krom znázorněného příkladu byly prováděny i další testy, ve všech příkladech bylo metodou nalezeno buď řešení optimální, nebo optimálnímu blízké (náklady navíc byly do 10 %.

3.3 Aplikace navrhované metody na 2D geodetické sítě

Dalším krokem byla aplikace algoritmu do polohové geodetické sítě. Nejprve byla z důvodu jednodušší implementace a snazší kontrole hrubou silou zkoumána 2D síť geodetických bodů určována pomocí vektorů GNSS.

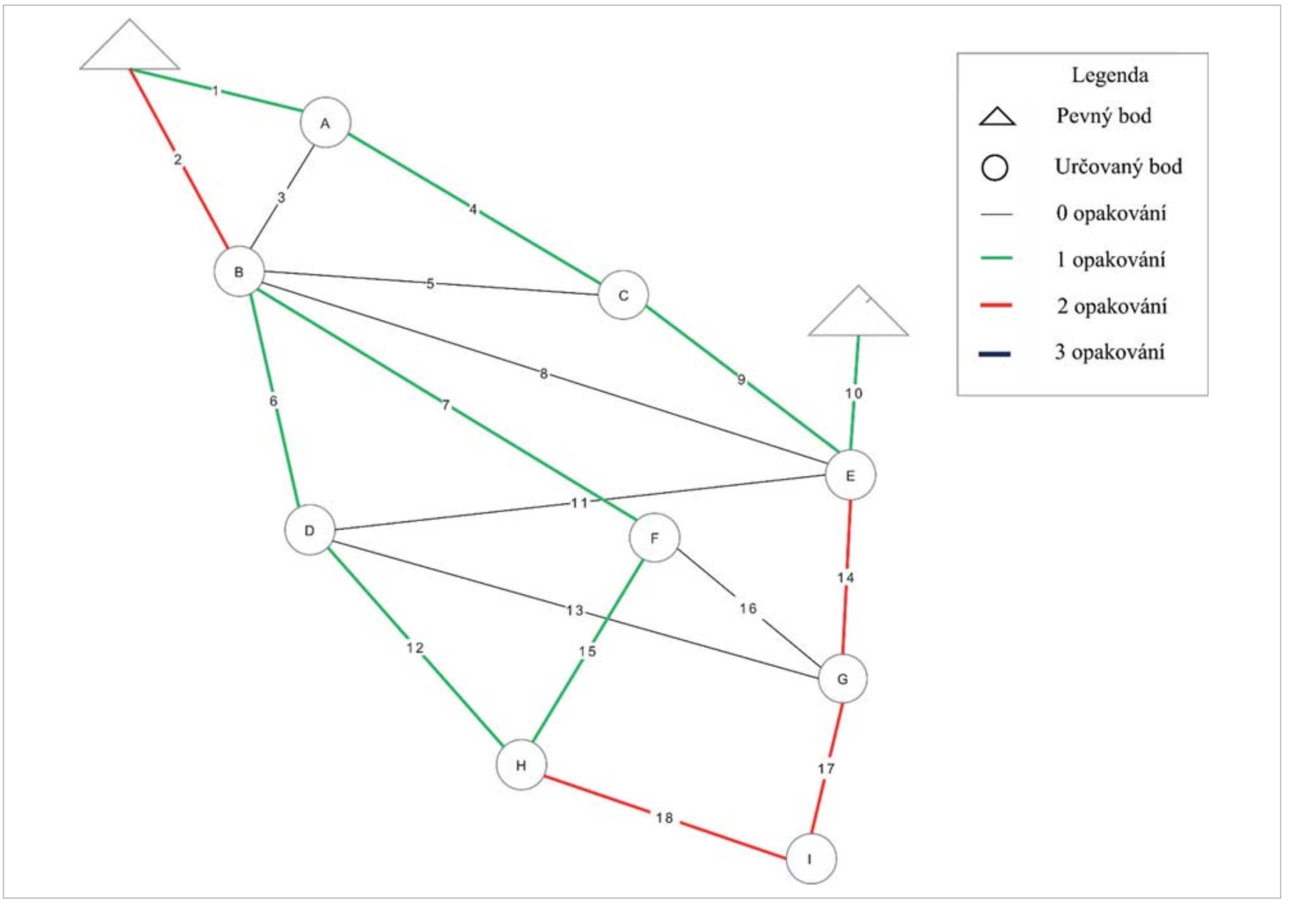
3.3.1 Síť vektorů GNSS

V případě sítě GNSS jsou pozorování vektory souřadnicových rozdílů (dx, dy) mezi jednotlivými body (výškové rozdíly nebyly v rámci zkoumání uvažovány), jejichž přesnost je závislá na vzdálenosti mezi body. Určovány jsou souřadnice bodů.

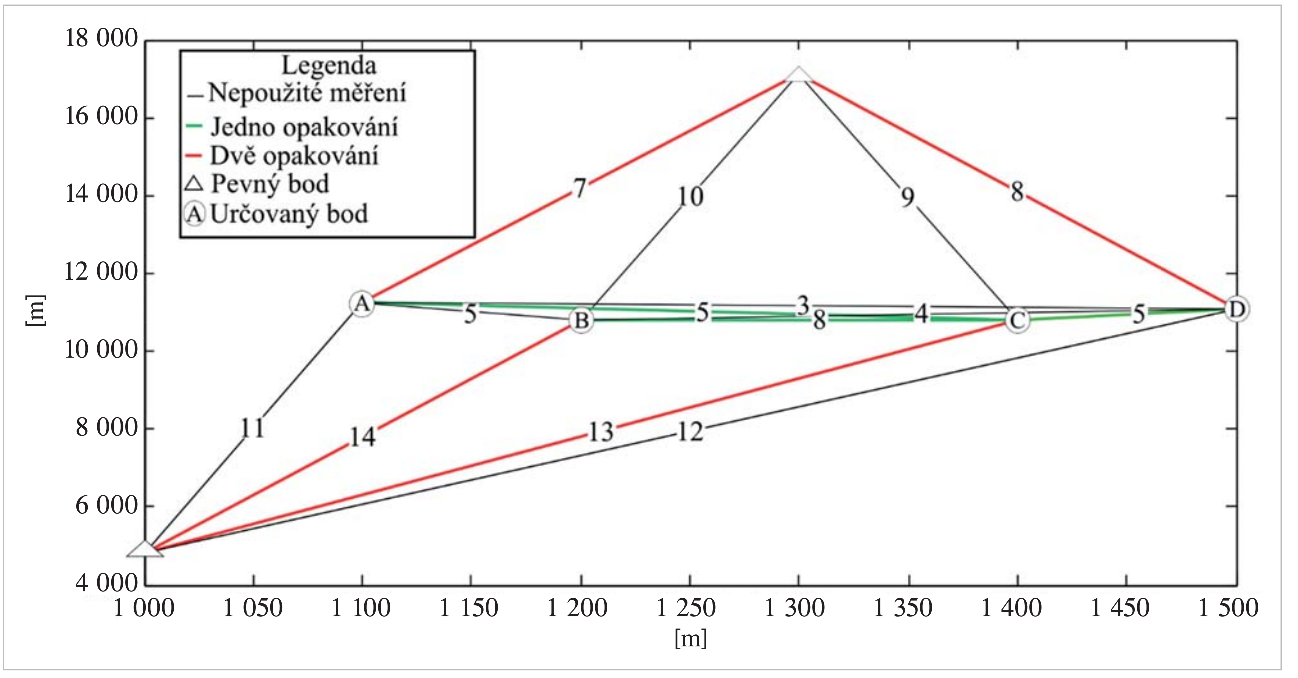
Jako kritérium pro optimalizaci nebyla na rozdíl od příkladů s nivelační sítí uvažována velikost směrodatných odchylek, nýbrž pro popis přesnosti polohy bodu výstižnější velikost hlavní poloosy elipsy chyb.

Metoda byla ověřena na několika různých sítí GNSS, vzhledem k ještě relativně nízkému počtu měření mohla být provedena kontrola hrubou silou. Jedna z testovaných sítí je zobrazena na obr. 2.

Ze 14 možných vektorů algoritmus polovinu zcela vyřadil, dvě opakování za různých podmínek určil vektorům z připojovacích bodů. Celkový počet měření v dané konfi-



Obr. 2 Testovací nivelační síť s rozdílnými vahami pořadů [17]



Obr. 3 Síť GNSS pro určování deformací se vzdálenými pevnými body [18]

guraci po optimalizaci je 11. Hrubou silou bylo objeveno řešení splňující požadavky na přesnost s počtem opakování 10. Nalezené řešení tedy není optimální, ale optimálnímu je velmi blízké.

3.3.2 Síť terestrických měření

Dalším krokem byla aplikace metody na geodetickou síť, ve které jsou měřeny osnovy směrů a vzdáleností. U měřených veličin v rámci jedné záměry je pak předpokládán shodný počet opakování. Jako kritérium pro optimalizaci je stejně jako u sítě GNSS volena hlavní poloosa elipsy chyb.

Opět bylo provedeno testování na větším množství různých sítí, ale výsledky většinou nebyly uspokojivé, při kontrole „hrubou silou" která mohla být provedena u sítí menšího rozsahu, bylo odhaleno, že celkový počet opakování po optimalizaci je výrazně vyšší než optimální.

Z podrobnějšího hodnocení výsledků vyplynulo, že metoda ve své základní podobě vesměs používá pouze nutný počet stanovisek k určení sítě, z čehož pak vyplývá malá provázanost celé sítě a při vyšších požadavcích na přesnost i vysoký počet opakování použitých měření. Tento výsledek vyplývá ze samotné premisy metody, která vybírá ta měření, která mají nejvyšší přínos, přičemž první vodorovný směr na stanovisku žádný přínos nemá. Stanoviska nad nutný počet vzniknou pouze náhodně prostřednictvím přínosu vzdálenosti, na kterou je navázán i vodorovný směr.

Tento problém je způsoben, jak již bylo uvedeno, nulovým přínosem prvního vodorovného směru v osnově, což lze dle našeho názoru vyřešit automatickým určením startovacího plánu, tvořeného dostatečným počtem fundamentálních měření, která by posloužila jako základ pro metodu maximálního přírůstku přesnosti a umožnila založení optimálního počtu stanovisek, a tedy i konfiguraci sítě více odpovídající geodetickým potřebám zejména s přihlédnutím ke spolehlivosti. Tato možnost je v současnosti testována na různých terestrických sítích v různých formách a úpravách, a s různými způsoby určení kostry, jedna z možných metod byla prezentována v [19].

4. Závěr

Z analýzy literatury k tématu vyplývá, že velmi malý přesah optimalizace geodetických sítí do praxe je způsoben nepřizpůsobením výstupů optimalizace realitě. U designu 1. řádu předpokládá nerealizovatelné posuny bodů a u 2. řádu pracuje obvykle přímo s vahami nebo neceločíselnými počty opakování, které musí být při převodu do praxe zaokrouhleny.

Byla navržena nová metoda, jejíž cílem je dosažení výsledků blízkých optimálním při dodržení praktických požadavků. Novost metody je zejména v tom, že již ze své podstaty zajišťuje dosažení všech požadovaných kritérií a pracuje striktně s celočíselnými počty opakování měření, nikoli s reálnými čísly, které se na závěr zaokrouhlí. Díky tomu není nutné výsledky optimalizace dále upravovat pro použití v praxi.

Metoda byla velmi úspěšně testována na nivelačních sítích, kde se ve většině případů shoduje s optimálním řešením určeným hrubou silou, nebo je mu blízká. Obdobné výsledky byly získány při testování na sítích určovaných z jednotlivých vektorů GNSS, kde se jsou výsledky také optimální či optimálním blízké.
z jednotlivých vektorů GNSS, kde se jsou výsledky také optimální či optimálním blízké.

U terestrických geodetických měření úhlů a délek byl zjištěn problém s použitím nadbytečného počtu stanovisek, v současnosti je testováno řešení tohoto problému různými způsoby.

Tento článek vznikl v rámci řešení grantového projektu SGS19/047/OHK1/1T/11 „Optimalizace získávání a zpracování 3D dat pro potřeby inženýrské geodézie, geodézie v podzemních prostorách a 3D skenování."

LITERATURA:

[1] SCHAFFRIN, B.: Aspects of Network Design. The optimization and design of geodetic networks (1st ed., pp. 56-73). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985.
[2] BAGHERBANDI, M.-ESHAGH, M.-SJÖBERG, L. E.: Multi-objective versus single-objective models in geodetic network optimization [Online]. Nordic Journal of Surveying and Real Estate Research, 2009, vol. 6, no. 1, pp. 7-20. Dostupné na: http://ojs.tsv.fi/index.php/njs/article/view/2703/2477.
[3] GRAFAREND, E. W.: Optimization of Geodetic Networks. Bolletino di Geodesia Scienze Affini, 1974, vol. 33, no. 4, pp. 351-406.
[4] SCHAFFRIN, B.-GRAFAREND, E. W.: Kriterion-Matrizen II – Zweidimensionale homgene und isotrope geodätische Netze, ZWF, 1982, Tei IIa, no. 5, pp. 183-194, Tei IIb, no. 11, pp. 485-493.
[5] BAARDA, W.: A testing procedure for use in geodetic networks (5 ed.). Delft: Kanaalweg 4, Rijkscommissie voor Geodesie, 1968.
[6] TEUNISSEN, P.: Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-Transformations. The optimization and design of geodetic networks (1st ed., pp. 11-55). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985.
[7] SCHMITT, G.: Third Order Design. The optimization and design of geodetic networks (1st ed., pp. 122-131). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985.
[8] KOCH, K. R.: First Order Design: Optimization of the Configuration of a Network by Introducing Small Position Changes. The optimization and design of geodetic networks (1st ed., pp. 56-73). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985.
[9] BERNÉ, J. L.-BASELGA, S.: First-order design of geodetic networks using the simulated annealing method. Journal of Geodesy, 2004. [online]. vol. 78, pp. 47-54. Dostupné na: http://personales.upv.es/~serbamo/simulated%20annealing.pdf.
[10] METROPOLIS, N.-ROSENBLUTH, M.-ROSENBLUTH, A.-TELLER, A.-TELLER, E.: Equation of state calculations by fast computing machines. 1953, J Chem Phys 21(6), pp. 1087-1092.
[11] KIRKPATRICK, S.-GELATT, C. D. Jr.-VECCHI, M. P.: Optimization by simulated annealing. Science 220(4598), 1983, pp. 671-680.
[12] YETKIN, M.-INAL, C.-YIGIT, C. O.: Optimal Design of Deformation Monitoring Networks Using PSO algorithm. Symphosium on deformation measurement and analysis. Lisbon, 2008.
[13] KENNEDY, J.-EBERHART, R. C.: Particle Swarm Optimization. Proceedings, IEEE Int Conf on Neural Networks, IV: IEEE Service Center, Piscataway, New Jersey, 1995, pp. 1942-1948.
[14] AMIRI-SEEMKOOEI, A. R.-MOHAMMAD ALI, S.: Approach for Equivalent Accuracy Design of Different Types of Observations. Journal Of Surveying Engineering, 130(1), 2004, pp. 1-5.
[15] AMIRI-SEEMKOOEI, A. R.: A New Method for Second Order Design of Geodetic Networks: Aiming at High Reliability. Survey review, 2004, vol. 37, no. 293, pp. 552-560.
[16] KUANG, S. L.: Optimization and design of deformation monitoring schemes, PhD dissertation, Dept. of surveying Eng., Technical Report, No. 157, UNB Frederiction, Canada, 1991.
[17] ŠTRONER, M.-URBAN, R.-MICHAL, O.: New geodetic measurement number optimization method – method of the maximal precision increment. GEODÉZIA, KARTOGRAFIA A GEOGRAFICKÉ INFORMAČNÉ SYSTÉMY 2016. Košice: Berg Faculty TU Košice, 2016, ISBN 978-80-553-2603-0.
[18] ŠTRONER, M.-URBAN, R.-MICHAL, O.: GNSS network optimization by the method of the maximal precision increment. In: 17th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2017 Geodesy and Mine Surveying. 17th International Multidisciplinary Scientific Geoconference SGEM 2017. Albena, 27. 6.–6. 7. 2017. Sofia: STEF92 Technology Ltd. 2017, s. 347-354. ISSN 1314-2704. ISBN 978-619-7408-02-7.
[19] ŠTRONER, M.-MICHAL, O.-URBAN, R.: Enhanced maximal precision increment method for network measurement optimization. In: HURČÍKOVÁ, V.-MOLČÍKOVÁ, S. eds. Geodézia, kartografia a geoinformatika 2017. Geodézia, kartografia a geoinformatika 2017. Demanovská dolina, 10.–13. 10. 2017. Košice: Berg Faculty TU Košice. 2017, ISBN 978-80-553-2814-0.
[20] KUBÁČEK, L.: Statistical theory of geodetic networks. VÚGTK, 2013, ISBN 978-80-85881-31-8, 285 s.
[21] KUKUČA, J.-BARTOŠOVÁ, L.-PECÁR, J.: Optimalizácia geodetických sietí. Geodetický a kartografický obzor 23(65), 1977, č. 8, s. 183-187.
[22] KUKUČA, J.-BARTOŠOVÁ, L.-PECÁR, J.: Metódy optimalizácie geodetických sietí v praxi. Geodetický a kartografický obzor 23(65), 1977, č. 12, s. 305-311.
[23] STANĚK, V.-KOPÁČIK, A.: Optimalizácia merania vytyčovanej siete mosta. Geodetický a kartografický obzor 29(71), 1983, č. 2, s. 41-46.
[24] PECÁR, J.: Rozšírenie možností optimalizácie geodetických sietí kombinováním kritérii optimality. Geodetický a kartografický obzor 35(77), 1989, č. 3, s. 49-54.

Do redakce došlo: 20. 4. 2019

Lektoroval:
prof. Ing. Alojz Kopáčik, PhD.,
Katedra geodézie, Stavebná fakulta,
STU v Bratislave

Dovětek lektora:

Optimalizačné algoritmy boli v ČSSR vyvíjané s úspechom porovnateľným aj so zahraničím už v rokoch 1970-1980. Na ich vývoji a výskume sa podieľali tímy pracovníkov výskumných ústavov, univerzít (najmä STU v Bratislave) a SAV Ústavu matematiky v Bratislave. V rámci aplikácie a overovania vyvíjaných algoritmov v praxi boli spočítané optimálne plány merania vytyčovacích sietí bratislavských mostov, mnohých tunelov a priehrad ako aj vytyčovacej siete pre výstavbu rýchlodráhy v Bratislave. Viaceré algoritmy sa stali súčasťou komerčných programových aplikácií dodnes používaných geodetickou praxou na území ČR a SR. Dôvodov na obmedzené využívanie optimalizačných algoritmov geodetickou praxou bolo niekoľko. Spočiatku to bol malý výkon dostupnej výpočtovej techniky, neskôr enormný nárast presnosti a spoľahlivosti meracej techniky, resp. čiastočné nahradenie terestrických techník technikami satelitnými najmä v oblasti budovania geodetických sietí. Napriek uvedenej skutočnosti sú tieto algoritmy a teória optimalizácie geodetických sietí dobre známe a sú súčasťou výučby na mnohých univerzitách.

Autori článku prezentujú metodiku výpočtu optimálneho plánu merania geodetickej siete (design 2. rádu) a aplikujú konkrétne metódu „maximálního přírůstku přesnosti" ako novú metódu. Je potrebné uviesť, že algoritmy vyvinuté v období rokov 1970-1980 doma i v zahraničí už vychádzali z tejto podmienky a aplikovali ju iteratívnym výpočtom na plány meraní geodetických štruktúr. Na inom mieste autori uvádzajú ako nóvum obmedzenie výpočtu len na celočíselné počty opakovaní (replikácií) veličín meraných v sieti. V závere uvádzajú, že nimi navrhnutá metóda si kladie za cieľ generovať výsledky blízke optimálnym pri dodržaní požiadaviek praxe. Z vlastnej podstaty iteratívnych výpočtov aplikovaných v minulosti, tieto generovali teoreticky optimálne plány meraní s celočíselnými hodnotami replikácií meraných veličín. Ich geodetickou modifikáciou sa plány upravovali tak, aby reflektovali zásady a skúsenosti v oblasti merania geodetických sietí. Takouto úpravou sa optimalita vypočítaných plánov znížila a teda výsledkom boli plány merania blízke optimálnym. Z tohto pohľadu postup uvádzaný autormi považujem za inovatívny, nie však nový.

Na druhej strane hodnotím pozitívne snahu autorov o oživenie problematiky optimalizácie geodetických meraní a širšieho využívania optimalizačných techník geodetickou praxou. Prínosom je najmä vývoj vlastných programových produktov už obsahujúcich možnosť generovania takých plánov merania geodetických sietí, ktoré reflektujú reálne požiadavky geodetickej praxe bez potreby ich dodatočnej úpravy. Tento počin je možné hodnotiť ako inovatívny a v tejto snahe prajem autorom mnoho úspechu.