

## Vertikálne referenčné systémy na území Slovenska a ich vzájomné diferencie

Doc. Ing. Marcel Mojzeš, PhD.,  
Stavebná fakulta, STU v Bratislave,  
Ing. Martin Kalafut, PhD.,  
AGIS Slovakia, spol. s r. o., Bratislava

### Abstrakt

Numerické vyjadrenie vertikálnych rozdielov medzi výškovými referenčnými systémami používanými na území Slovenska a susedných štátov si vyžaduje bežná prax spočívajúca vo výmene geodetických údajov v rámci rôznych medzinárodných projektov, na ktorých participujú rôzne medzinárodné inštitúcie. Popis definície a realizácie troch vertikálnych referenčných systémov: Jadranský (Terst), Baltský po vyrovnaní (Kronšadt), Európsky (Amsterdam), transformačné vzťahy medzi nimi a numerickú realizáciu výškových diferencií medzi nimi.

### Vertical Reference Systems in Slovakia and their Reciprocal Differences

#### Abstract

Numerical expression of vertical differences among vertical reference systems used in Slovakia and neighbouring countries requires common practice based on the need of exchange of geodetical data within different international projects, where different international institutions take part in. The presented article describes definitions and realizations of three vertical reference systems: Adriatic (zero levelling point in Trieste, Italy), Baltic after adjustment (zero levelling point in Kronstadt) and European (zero levelling point in Amsterdam), transformation relations among them and numerical computation of vertical differences among them.

**Keywords:** physical heights, transformation, geoid, quasigeoid

#### 1. Úvod

Nové teoretické poznatky o štruktúre Zeme a jej fyzikálnych vlastnostiach sa významne prejavili aj v definíciách a realizáciách vertikálnych referenčných systémov [1]. Praktická realizácia vertikálneho referenčného systému v oblasti milimetrov je značne náročná na teoretickú formuláciu, numerickú realizáciu a výpočet potrebných korekcií pri spracovaní merania.

V Európe sa používajú tri rozdielne druhy fyzikálnych výšok (normálne výšky, ortometrické výšky, normálne ortometrické výšky). Normálne výšky sa používajú vo Francúzku, Nemecku, Švédsku a vo väčšine krajín východnej Európy, ortometrické výšky používa Belgicko, Dánsko, Fínsko, Taliansko a Švajčiarsko, normálne ortometrické výšky používajú v Nórsku, Rakúsku a v krajinách bývalej Juhoslávie.

Vertikálny referenčný systém na povrchu Zeme je určený strednou hladinou mora, ktorá sa monitoruje v jednej alebo viacerých mareografických staniách. Referenčné mareografy sú inštalované v oceánoch alebo vnútrozemských moriach, napr. Atlantický oceán, Baltické more, Severné more, Stredozemné more, Čierne more. Diferencie medzi strednými hladinami uvedených oceánov a morí sa môžu pohybovať až do niekoľkých decimetrov, ale aj metrov (napr. okolo Austrálie), čo je spôsobené rozdielnou strednou výškou hladín oceánov a morí voči hmotnému stredu Zeme [2].

Súčasný riešenie úloh, viazaných na vertikálne referenčné systémy, vyžaduje informácie o dynamike zemského povrchu v statickej, kinematickej a dynamickej podobe. To predpokladá hlbšie štúdium teoretických a experimentálnych výsledkov celého procesu, ktorý prebieha na zemskom povrchu, na ktorom plánujeme vybudovať vertikálnu referenčnú sieť pre praktické monitorovanie vertikálnych zmien.

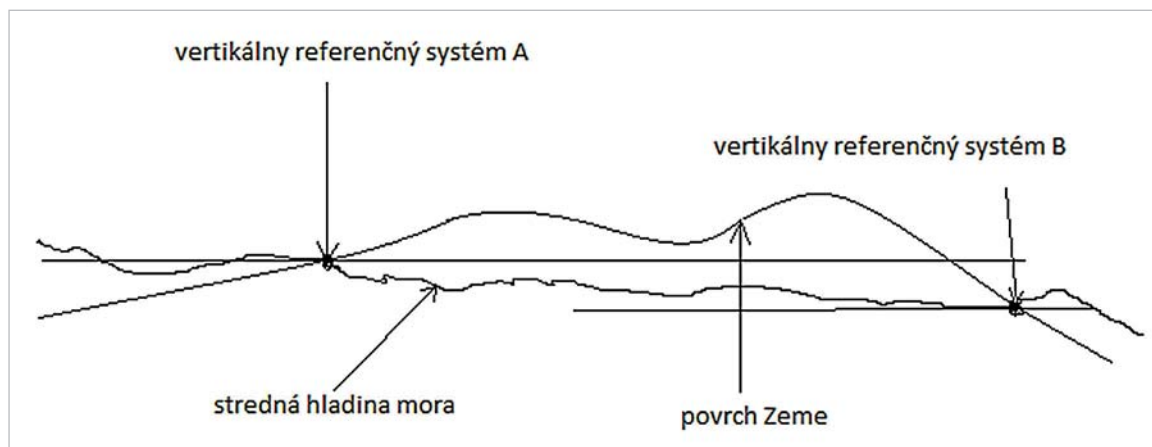
#### 2. Základné definície a informácie

Vertikálny referenčný systém je jednorozmerný súradnicový systém s definovaným počiatkom a mierkou definovanou stupnicami meračských lát. Počiatok je bod na povrchu Zeme, kde výška je definovaná konkrétnou hodnotou alebo strednou výškou mareografu. Z tohto počiatku bodu výškové diferencie môžu byť merané na akýkoľvek bod použitím štandardných nivelačných procedúr a korekcií, rešpektujúcich parametre skutočného alebo normálneho tiažového poľa Zeme. Bod strednej hladiny mora slúžil tradične ako počiatkový bod. Na tomto bode nie je dôležitá absolútna hodnota tiažového potenciálu Zeme, pretože sa zaujíname len o vertikálne diferencie (rozdiely potenciálu) vzhľadom na počiatok [3], obr. 1.

##### 2.1 Jadranský vertikálny referenčný systém

Jadranský vertikálny referenčný systém je definovaný strednou hladinou Jadranského mora meraného v Terste (Molo Sartorio) v roku 1875 Dr. Farolfim z výsledkov len jednoročných meraní výšky morskej hladiny. Namerané nivelačné prevýšenia boli opravované o normálne ortometrické korekcie. Vyrovnanie nivelačnej siete I. rádu bolo vykonané pomocou podmienkových meraní. Podrobnejšie informácie uvádza [4].

Doba, počas ktorej meral Dr. Farolfi strednú hladinu Jadranského mora, bola príliš krátka. Vzhľadom na variáciu polohy Mesiaca a Slnka voči Zemi bolo potrebné merať polohu hladiny Jadranského mora až 18,6 roka. Základný výškový bod bol stabilizovaný na budove colnice v Terste. Od tohto bodu boli merané nivelačné ťahy po celom území bývalého Rakúska-Uhorska a takmer výhradne po železničných tratiach.



Obr. 1 Dva vertikálne referenčné systémy

Po roku 1945 bola budovaná Československá jednotná nivelačná sieť (ČSJNS), vzťahujúca sa na základný výškový bod Lišov (pri Českých Budějoviach v ČR). Do ČSJNS I. rádu boli prevzaté výsledky merania nivelačných ťahov v rokoch 1939-1941 v Čechách a na Morave, v pohraničných oblastiach boli zamerané nové nivelačné ťahy v rokoch 1946-1948 a na Slovensku bola nivelačná sieť I. rádu zameraná v rokoch 1949-1952. Po uvážení normálnych ortometrických korekcií nivelačná sieť I. rádu bola vyrovnaná ako jeden celok.

## 2.2 Baltský vertikálny referenčný systém po vyrovnaní

Baltský vertikálny referenčný systém po vyrovnaní (Bpv) je definovaný strednou hladinou Baltského mora meranou v Kronštade. Namerané prevýšenia boli pred vyrovnaním opravené o normálne korekcie tiažového poľa Zeme podľa teórie Molodenského. V roku 1957 bola ČSJNS I. rádu spoločne vyrovnaná s nivelačnými sieťami západnej časti vtedajšieho ZSSR (Zväz sovietskych socialistických republík) spolu s nivelačnými sieťami vtedajších socialistických štátov (Nemecká demokratická republika, Poľsko, Československo, Maďarsko, Bulharsko).

Na území bývalého Československa (bez Podkarpatskej Rusi) sa referenčné výšky v Bpv líšia od Jadranského systému v rozsahu **od 35 cm do 42 cm** a to z dôvodu:

- zavedenia inej strednej hladiny mora,
- iného spôsobu výpočtu korekcií nivelačných prevýšení z tiažového poľa Zeme,
- medzinárodného vyrovnania nivelačnej siete.

Napríklad bod Lišov má v Bpv výšku 564,7597 m, t.j. menšiu o 0,3886 m než v Jadranskom výškovom systéme [4], [5].

**Celý tento proces je založený na statickom princípe zemského povrchu a oceánov, ktorý predpokladá, že nedochádza k zmene zemského povrchu v čase, ani k zmene strednej výšky oceánov v čase.**

Súčasný poznatky o meraní výšok zemského povrchu a strednej hladiny oceánov potvrdzujú, že dochádza k zmene výšok zemského povrchu a k zmene strednej výšky hladiny oceánu v mareografe v čase predovšetkým preto, že:

1. v dôsledku globálneho otepľovania dochádza k roztápaniu ľadovcov na celom povrchu Zeme, najviac v Grónsku a v Antarktíde a tým dochádza v dôsledku hydrostatického vyrovnania k zmene výšky hla-

diny v oceánoch a morí v mareografoch v priemere o 3,5 mm/rok [6],

2. v dôsledku strácania hmôt ľadovcov a ich presunu do oceánov dochádza k tzv. globálnemu izostatickému vyrovnaniu zemského povrchu. V Európe sa to prejavuje globálnym izostatickým zdvihom zemského povrchu v škandinávskych štátoch až 1 cm/rok [7]. Na území Slovenska globálne izostatické vyrovnanie sa prejavuje poklesom alebo zdvihom zemského povrchu v rozsahu do 1 mm/rok [8]. Rovnako v susednej Českej republike dosiahol zdvih alebo pokles zemského povrchu hodnotu takisto 1 mm/rok [9].

Tieto javy sú však nevýznamné pri relatívnych zmenách prevýšenia medzi uvažovanými referenčnými systémami **Jadran<sub>ČSJNS</sub>** a **Bpv**.

## 2.3 Európsky vertikálny referenčný systém

Európsky vertikálny referenčný systém (EVRS) vznikol na základe podnetu komisie EUREF (Európska regionálna komisia Medzinárodnej geodetickej asociácie pre geodetické referenčné systémy) vybudovať Jednotnú európsku nivelačnú sieť (UELN-United European Levelling Network). UELN bola vytvorená v roku 1973 a obsahovala nivelačné siete I. rádu zo štrnástich západoeurópskych štátov.

V roku 1994 na zasadnutí EUREF vo Varšave bola prijatá rezolúcia spojiť vertikálne základy všetkých európskych štátov s presnosťou lepšou ako 0,1 m [10]. Proces spojenia prebiehal vo viacerých etapách. Posledná etapa bola označená UELN-95/98 a tvorí základ pre Európsky vertikálny referenčný systém pri pripájaní ďalších meraní.

Európsky vertikálny referenčný systém je definovaný nasledovnými konvenciami:

- a) Vertikálny referenčný systém má nulu v bode, v ktorom skutočný tiažový potenciál Zeme  $W_o$  je rovný normálnemu tiažovému potenciálu  $U_o$  na strednom elipsoide Zeme:

$$W_o = U_o. \quad (1)$$

- b) Výšková zložka je v podstate diferenciacia  $\Delta W_p$  medzi potenciálom  $W_p$  tiažového poľa Zeme v uvažovanom bode  $P$  a tiažovým potenciálom  $W_o$ . Rozdiel potenciálu  $-\Delta W_p$  sa nazýva geopotenciálna kóta  $c_p$

$$-\Delta W_p = W_o - W_p = c_p. \quad (2)$$

Normálne výšky sú ekvivalentné geopotenciálnym kótam.

- c) Parametre EVRS sú vyjadrené v Zero Tidal System a to znamená, že potenciály v prípade a) a b) obsahujú potenciály permanentných slapových deformácií, ale neobsahujú samotný permanentný slapový potenciál.

## 2.4 Európsky vertikálny referenčný rámec 2000

Realizácia Európskeho vertikálneho referenčného rámca (EVRF2000) [11] vychádza z nasledovných prijatých princípov:

1. Nulová hladina prechádza referenčným bodom siete UELN No. 000A2530 Normaal Amsterdams Peil (NAP), ktorý sa nachádza v Holandsku, t.j. platí:

$$C_{NAP} = 0. \quad (3)$$

2. Na výpočet odvodených parametrov a konštánt normálneho tiažového poľa Zeme sa používa Geodetický referenčný systém 1980 (GRS80). Z toho vyplýva, že:

$$W_{NAP}^{RREAL} = U_{oGRS80}. \quad (4)$$

3. EVRF2000 je fixovaný geopotenciálnou kótou 7,0259 m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup> a ekvivalentnou normálnou výškou 0,71599 m na referenčnom bode NAP No. 000A2530 v Holandsku.
  4. EVRF2000 je realizovaný pre praktické použitie ako statický vertikálny referenčný rámec, definovaný pomocou rozdielov tiažových potenciálov bodov vzhľadom na referenčný bod NAP alebo ekvivalentnými normálnymi výškami bodov vzhľadom na referenčný bod NAP.
  5. Geometrická poloha bodov je vyjadrovaná v Európskom terestrickom referenčnom systéme 1989 (ETRS89).
  6. EVRF2000 na redukciu nameraných údajov používa Zero Tide System.  
EVRF môže byť realizovaný dvomi spôsobmi:
- a) Pomocou nivelačných a gravimetrických meraní a následného vyrovnania geopotenciálnych kót:

$$W_p = W_o - c_p, \quad H_n = c_p / \gamma, \quad (5)$$

kde  $\gamma$  je priemerná hodnota normálneho tiažového zrýchlenia pozdĺž normálnej tiažnice.

- b) Pomocou meraní GNSS (elipsoidická výška  $h_p$ ) a globálneho modelu kvázigeoidu (Global Gravity Model – GGM) riešením geodetickej okrajovej úlohy (Geodetic Boundary Value Problem – GBVP):

$$W_p = U_p + T_p, \quad \zeta_p = T_p / \gamma_Q = (W_p - U_p) / \gamma_Q, \quad H_n = h_p - \zeta_p, \quad (6)$$

kde  $\zeta_p$  je výška geoidu resp. kvázigeoidu v bode P.

## 2.5 Európsky vertikálny referenčný rámec 2007

Európsky vertikálny referenčný rámec (EVRF2007) je nová realizácia EVRS, ktorá je založená na kombinovanej stratégii troch elementov: referenčnej siete, vertikálnom rámci a meraniach, vyvíjajúcich sa v čase referenčného rámca. Namerané údaje, ak je to možné, sú redukované na epochu 2000 v snahe určiť transformačné vzťahy medzi EVRF2007 a EVRF2000. EVRF2007 je realizovaná novým vyrovnaním

UELN pomocou geopotenciálnych kót. Všetky merania zo škandinávskych štátov sú redukované na epochu 2000 z postglaciálneho zdvihu (Post Glacial Rebound). Referenčný systém EVRF2007 je realizovaný pomocou 13 referenčných bodov na Európskom kontinente so špeciálnou stabilizáciou a ich geopotenciálne rozdiely splňajú nasledovnú podmienku:

$$\sum_{i=1}^{13} (c_{p,95/98} - c_{p,EVRF2007}) = 0. \quad (7)$$

Geopotenciálne rozdiely sú redukované na Zero Tidal System. Podrobnosti, súvisiace s organizovaním merania, redukciami a vyrovnaním merania sú uvedené [12].

## 2.6 Matematická formulácia rozdielu medzi dvomi vertikálnymi referenčnými systémami

Referenčnú výšku v Jadranskom vertikálnom referenčnom systéme označme indexom A a v Baltskom vertikálnom referenčnom systéme označme indexom B (obr. 1). Uvažujme dva body C a D, ktoré majú určené referenčné výšky v oboch systémoch A a B. Referenčnú výšku bodu D určenú v Jadranskom referenčnom systéme môžeme vyjadriť vzťahom:

$$H^A(D) = H^A(C) + \Delta h_{CD}^{niv} + C_{CD}^1 + v_D^A, \quad (8)$$

kde

$H^A(D)$  – je referenčná výška bodu D v Jadranskom systéme,  
 $H^A(C)$  – je referenčná výška bodu C v Jadranskom systéme,  
 $\Delta h_{CD}^{niv}$  – je nivelované prevýšenie medzi bodmi C a D,  
 $C_{CD}^1$  – je normálna ortometrická korekcia medzi bodmi C a D,  
 $v_D^A$  – je oprava z vyrovnania v Jadranskom referenčnom systéme na bode D.

Normálnu ortometrickú korekciu  $C_{CD}^1$  medzi bodmi C a D môžeme vypočítať zo vzťahu [13]:

$$C_{CD}^1 = -0,0000254 H_m \Delta \phi'' \quad (\text{v milimetroch}), \quad (9)$$

kde

$$H_m = \frac{H_C + H_D}{2} \quad (\text{v metroch}),$$

$\Delta \phi$  (v uhlových sekundách).

Pre referenčnú výšku bodu D, určenú vo vertikálnom referenčnom systéme Bpv môžeme napísať vzťah:

$$H^B(D) = H^B(C) + \Delta h_{CD}^{niv} + C_{CD}^1 + C_{CD}^2 + v_D^B, \quad (10)$$

kde

$H^B(D)$  – je referenčná výška bodu D v Bpv,  
 $H^B(C)$  – je referenčná výška bodu C v Bpv,  
 $C_{CD}^2$  – je korekcia z tiažového poľa Zeme medzi bodmi C a D,  
 $v_D^B$  – je oprava z vyrovnania v Bpv na bode D.

Korekciu z tiažového poľa Zeme  $C_{CD}^2$  medzi bodmi C a D môžeme vypočítať zo vzťahu [9]:

$$C_{CD}^2 = -0,0010193(g - \gamma)_m \Delta h_{CD}^{mer} \quad (\text{v milimetroch}), \quad (11)$$

kde

$(g - \gamma)_m$  – je stredná hodnota Fayeovej anomálie tiažového zrýchlenia medzi bodmi C a D v miligaloch,

$\Delta h_{CD}^{mer}$  – je nivelované prevýšenie medzi bodmi C a D v metroch.

Fayove anomálie tiažového zrýchlenia pri praktických výpočtoch sú nevhodné na použitie lineárnej interpolácie. Ak je k dispozícii dostatočne presná mapa Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia  $(g - \gamma)_B$ , pretransformujú sa interpolované hodnoty Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia na Fayove anomálie tiažového zrýchlenia pomocou vzťahu:

$$(g - \gamma)_F + (g - \gamma)_B + 0,1119H \text{ (v miligaloch)}, \quad (12)$$

kde  $H$  je nadmorská výška bodu v metroch.

Ak vzťah (3) odčítame od vzťahu (1), dostaneme **rozdiel medzi dvomi výškovými systémami**, t.j. rozdiel medzi Baltským výškovým systémom a Jadranským výškovým systémom v bode D:

$$\Delta h^{AB}(D) = H^B(D) - H^A(D) = H^B(C) + \Delta h_{CD}^{niv} + C_{CD}^1 + C_{CD}^2 + v_D^B - H^A(C) - \Delta h_{CD}^{niv} - C_{CD}^1 - v_D^A, \quad (13)$$

respektíve

$$\Delta h^{AB}(D) = H^B(D) - H^A(D) = H^B(C) - H^A(C) + C_{CD}^2 + v_D^B - v_D^A. \quad (14)$$

Vzťah (14) je možné použiť na kontrolu výpočtu rozdielov medzi dvomi výškovými systémami v ľubovoľnom bode, ak poznáme rozdiel medzi dvomi výškovými systémami v konkrétnom bode a k tomu pridáme korekciu z tiažového poľa Zeme  $C^2$  medzi konkrétnym bodom a ľubovoľne zvoleným bodom. Výpočet je  $v_D^B - v_D^A$  problematický vtedy, keď nepoznáme opravy z vyrovnania referenčných sietí, čo je aj náš prípad.

Predpokladáme, že tieto opravy z vyrovnania referenčných vertikálnych sietí sú malé a neprekročia hodnotu 10 mm, preto ich nebudeme uvažovať [4].

povanie v mierke 1 : 25 000, ktoré sa začalo v roku 1952, boli výšky bodov vertikálneho systému **Jadran<sub>CSJNS</sub>** prevedené do približného baltského vertikálneho systému odčítaním konštantnej hodnoty 0,68 m a takto definovaný baltský vertikálny systém sa označuje ako baltský výškový systém **B-68**.

Rozhodnutím bývalej Ústrednej správy geodézie a kartografie (ÚSGK) zo 17. 2. 1955 sa zaviedol dočasný baltský vertikálny systém označený ako **B-46**. Výšky nivelačných bodov v tomto dočasnom baltskom vertikálnom systéme (**B-46**) sa vypočítali z nivelačných bodov vertikálneho systému **Jadran<sub>CSJNS</sub>** odčítaním konštanty 0,46 m. Tento rozdiel (46 cm) bol určený na identickom nivelačnom bode bývalej československej a sovietskej nivelačnej siete v Čiernej nad Tisou.

V roku 1957 bola sieť I. rádu bývalého Československa spoločne vyrovnaná s nivelačnou sieťou západnej časti bývalého Sovietskeho zväzu a s nivelačnými sieťami bývalých socialistických štátov. Všetky namerané prevýšenia boli pred spoločným vyrovnaním opravené o Molodenského korekcie zo skutočného tiažového zrýchlenia meraného na povrchu Zeme. Východiskovým bodom pre toto vyrovanie bol vodočet v Kronštade. Tak vznikol **Baltský výškový systém po vyrovnaní – Bpv** [4].

Praktická realizácia výpočtu rozdielov medzi **Jadran<sub>CSJNS</sub>** (1951) a **Bpv** (1951) bola vykonaná v hraničnej oblasti Slovenska s Rakúskom, v strednici rieky Morava, od jej sútoku s riekou Dyje, po jej sútok s Dunajom pri Devíne a ďalej po strednici rieky Dunaj, od jeho sútoku s Moravou, po most Lafranconi v Bratislave pre účely Slovenského vodohospodárskeho podniku, š. p., odštepny závod Bratislava na základe údajov, poskytnutých Geodetickým a kartografickým ústavom Bratislava (**tab. 1, tab. 2**). Následne bol rovnakou metódou realizovaný výpočet výškových diferencií v rovnakej lokalite s využitím aktuálne platných jadranských výšok určených presnou niveláciou na 57 rakúskych nivelačných bodoch na rakúskej strane rieky Morava a s využitím aktuálne platných baltských výšok v systéme **Bpv** určených presnou niveláciou na 52 slovenských nivelačných bodoch na slovenskej strane rieky Morava (viď časť 4).

### 3. Výpočet výškových diferencií na nivelačných bodoch s historickými jadranskými výškami a historickými výškami v Bpv pozdĺž hraníc Slovenska a Rakúska na rieke Morava

#### 3.1 Historické pozadie prechodu z vertikálneho systému **Jadran<sub>CSJNS</sub>** do **Bpv**

**Jadran<sub>CSJNS</sub>** bol v rámci bývalého Československa platným výškovým systémom do roku 1952. Pre topografické ma-

**3.1.1** Dôležitá poznámka, vplyvajúca na praktické riešenie úlohy pri použití slovenských nivelačných bodov s nivelovanými výškami v oboch vertikálnych systémoch

Na inherentne konzistentnú transformáciu výšok z jedného vertikálneho systému do druhého vertikálneho systému a naopak (v našom prípade je to výšková transformácia medzi **Jadran<sub>CSJNS</sub>** (1951) a **Bpv** (1951)), je nevyhnutné

**Tab. 1** Geodetické údaje bodov nivelačného ťahu I. rádu nivelačnej siete **Jadran<sub>CSJNS</sub>** a **Bpv** (všetky hodnoty horizontálnych súradníc a výšok sú v metroch)

Bod	Jadran <sub>CSJNS</sub> (1951)	Rozdiel Jadran <sub>CSJNS</sub> (1951) – Bpv (1951)	Bpv (platná v roku 2018)	Rok merania	Rok kontroly	S-JTSK Y	S-JTSK X
CZA-520	189,0396	0,4022	188,6289	3. 7. 2000	2000	575144,40	1278448,87
CZA-544	218,2093	0,4011	217,8081	2. 6. 1993	2002	577690,00	1275092,81
CZA-662.01	151,7957	0,4019	151,3466	23. 9. 1992	2000	578462,14	1237279,37
CZA-673	152,6300	0,4019	152,1968	3. 7. 2000	2000	577324,40	1232601,36
ZBZC-544	154,6547	0,4017	154,1452	5. 5. 1999	1999	576333,79	1219729,46



**Tab. 2** Geodetické údaje bodov nivelačného ťahu II. rádu nivelačnej siete ČSJNS (všetky hodnoty horizontálnych súradníc a výšok sú v metroch)

Bod	Bpv (2018)	Jadran <sup>CSJNS</sup> (1951) – – Bpv (1951)	S-JTSK Y	S-JTSK X
ZBZC-539	155,0229	0,4017	576105,64	1220244,48
ZBZC-540	154,6666	0,4017	576293,36	1219901,90
ZBZC-541	154,6824	0,4017	576331,94	1219830,29
ZBZC-544	154,1453	0,4017	576333,79	1219729,46
ZA18-511.02	145,4447	0,4019	588055,69	1243611,38
ZA18-513	145,7287	0,4020	588021,15	1244552,74
ZA18-513.02	145,6217	0,4020	588271,87	1244870,79
ZA18-530	146,4116	0,4023	589184,73	1249733,66
ZA18-532	145,3157	0,4023	589261,04	1249883,44
ZA10-517	145,3348	0,4026	586200,15	1259252,89
ZA10-518	144,6217	0,4026	586324,41	1259080,03
ZA10-520	145,0833	0,4025	586408,11	1258685,29
ZA2-501	150,9765	0,4034	582970,64	1272512,62
ZA2-502	151,9138	0,4034	582866,73	1272181,68
ZA2-503	143,4469	0,4036	582803,78	1271952,21
ZA1-505	140,7220	0,4038	578371,14	1279829,77
ZA1-510	143,1379	0,4037	579805,54	1279212,52
ZA1-516	152,5220	0,4033	581033,45	1278457,07
ZA1-521	147,0887	0,4035	582349,61	1276818,83
ZA1-522	157,8125	0,4032	582329,15	1276659,97
ZA1-525	152,7186	0,4034	582464,34	1276472,47
ZA1-526	149,4408	0,4035	582626,21	1276183,70
ZA1-537	142,2484	0,4036	583167,77	1273182,85
ZA1-539	145,5621	0,4035	583134,29	1272905,53
ZA2-500	149,7181	0,4034	583008,26	1272776,10
CZA-501	141,5229	0,4038	572785,25	1279759,34
CZA-503	152,7604	0,4035	573295,73	1279656,07
CZA-505	159,6769	0,4033	573585,90	1279603,79
CZA-506	162,8133	0,4032	573568,09	1279381,32
CZA-508	166,2824	0,4030	573504,27	1279260,68
CZA-509	176,0520	0,4027	573547,03	1279169,67

poznať výšky na dostatočnej množine výškových identických bodov v záujmovej lokalite v oboch uvažovaných systémoch z **vykonaných meraní pochádzajúcich z rovnakého časového obdobia**. Vzhľadom na skutočnosť, že na riešenie tejto úlohy sú k dispozícii len historické výšky vo vertikálnom systéme **Jadran<sup>CSJNS</sup>** (pochádzajúce z roku 1951 a tieto výšky odvtedy neboli nikdy aktualizované), kvôli konzistentnosti riešenia bolo nutné vo výpočtoch aplikovať výšky na tých istých identických nivelačných bodoch vo vertikálnom systéme **Bpv** tiež z **tohto obdobia**. V opačnom prípade, ak by sa aplikovali aktuálne platné výšky vo vertikálnom systéme **Bpv**, riešenie by bolo inherentne nekonzistentné, pretože by sa porovnával aktuálny vertikálny systém **Bpv** s historickým vertikálnym systémom

**Jadran<sup>CSJNS</sup>** (1951), ktorý by sa musel považovať za nemenný, čo by bolo v hlbokom protiklade s realitou dynamických prejavov (stúpanie a klesanie) zemského povrchu v čase. Túto skutočnosť nie je možné pre dlhšie časové obdobie zanedbať. Názočne to ilustrujú výšky vo vertikálnom systéme **Bpv** platné v roku 2018 na identických bodoch siete I. rádu (**tab. 1**, stĺpec č. 4 zľava). Ak by sa vypočítali rozdiely medzi výškami vertikálneho systému **Jadran<sup>CSJNS</sup>** (1951) a výškami vertikálneho systému **Bpv** (2018), na niektorých bodoch by tieto rozdiely mali blízke hodnoty rozdielom medzi **Jadran<sup>CSJNS</sup>** (1951) a **Bpv** (1951) – napr. bod CZA-544, kde rozdiel rozdielov predstavuje 0,0001 m. Na iných bodoch sú hodnoty rozdielov väčšie (niekoľko cm). Markantný rozdiel je v našom prípade na identickom nive-

lačnom bode ZBZC-544, kde rozdiel rozdielov dosahuje hodnotu až 0,1078 m (je to v oblasti Sekule-Brodské, štát-na hranica).

Preto v ďalšom texte sa vyskytuje skratka **Bpv** (1951). To je nutné interpretovať tak, že sú to výšky (alebo výškové rozdiely) na identických nivelačných bodoch merané (určené) v rokoch 1949-1951 [14] a vyrovnané v prvom vyrovnaní v rámci vertikálneho systému **Bpv** v roku 1957, odkedy sa stal vertikálny systém **Bpv** oficiálne záväzným verti-

kálnym systémom na území Slovenska. Uvedený úsek dlhý približne 78,3 km (meraný po strednici Moravy a Dunaja) bol rozdelený na 314 úsekov dlhých po 250 m (t.j. na strednici riek bolo vygenerovaných 315 bodov vzdialených od seba 250 m – okrem posledného úseku, ktorý bol kratší – s horizontálnymi súradnicami X, Y v súradnicovom systéme S-JTSK) ako je to ilustrované na [obr. 2](#), ktorý predstavuje fragment (sútok Moravy a Dunaja pri Devíne) z celkovej dĺžky 78,3 km.



Obr. 2 Ilustrácia segmentácie po osi rieky vygenerovaním bodov v strede rieky s intervalom 250 m (biela farba) s príslušnými bodmi I. rádu (červená farba) a II. rádu (žltá farba) nivelačnej siete



Body označené bielym krúžkom predstavujú začiatok/koniec príslušného 250 m dlhého segmentu s horizontálnymi súradnicami v súradnicovom systéme S-JTSK, v ktorých sú vypočítané hodnoty rozdielov medzi vertikálnymi výškovými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)**.

Body zobrazené červeným krúžkom sú body I. rádu nivačnej siete so známymi hodnotami výšok vo výškovom systéme **Bpv (2018)** a **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a známymi hodnotami rozdielov medzi výškovými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** – pozri **tab. 1** (zdroj údajov – Geodetický a kartografický ústav Bratislava).

Body zobrazené žltým krúžkom s krížikom sú body II. rádu nivačnej siete so známymi hodnotami výšok vo výškovom systéme **Bpv (2018)** a známymi rozdielmi medzi výškovými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** – pozri **tab. 2** (zdroj údajov – Geodetický a kartografický ústav Bratislava).

V 3. stĺpci **tab. 1** a **tab. 2** sú uvedené rozdiely medzi jadranským výškovým systémom realizovaným ČSJS (Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)) a Bpv (1951), s výškami platnými v roku 1951 tak, ako ich poskytol Geodetický a kartografický ústav Bratislava.

Na kontrolu overenia správnosti výpočtu rozdielov medzi dvomi výškovými systémami v ľubovoľnom bode predmetnej lokality bolo použitých 5 bodov nivačného ťahu I. rádu ČSJS, ktoré sa nachádzali geograficky najbližšie k oblasti záujmu (menej ako 10 km vzdialené od riek Morava a Dunaj). V **tab. 1** sú uvedené ich horizontálne a vertikálne súradnice a rozdiely medzi výškovými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)**, ktoré poskytol Geodetický a kartografický ústav Bratislava.

### 3.1.2 Kontrola výpočtu rozdielov medzi dvomi výškovými systémami

Z celoslovenskej mapy úplných Bouguerových gravitačných anomálií (**obr. 3**), [15] a z časti Podunajskej nížiny (**obr. 4**) ako uvádza [16], boli odhadnuté Bouguerove anomálie pre všetky body I. rádu nivačnej siete, ktoré sú uvedené v **tab. 3**.

Po odhadnutí hodnôt úplných Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia na nivačných bodoch I. rádu bolo mož-

né pristúpiť k výpočtu Fayových anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu pre jednotlivé nivačné body I. rádu v zmysle vzťahu (12). Tieto hodnoty sú uvedené v **tab. 4**.

Po výpočte Fayových anomálií tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu na nivačných bodoch I. rádu je možné v zmysle vzťahu (11) vypočítať korekciu z tiažového poľa Zeme  $C_{CD}^2$  medzi dvomi bodmi (vo vzťahu (11) symbolicky označenými ako C a D). Tento výpočet je uvedený v **tab. 5**, kde symbolické označenie bodu C resp. D vo vzťahoch treba nahradiť konkrétnym označením bodov uvedených v prvom stĺpci **tab. 5**.

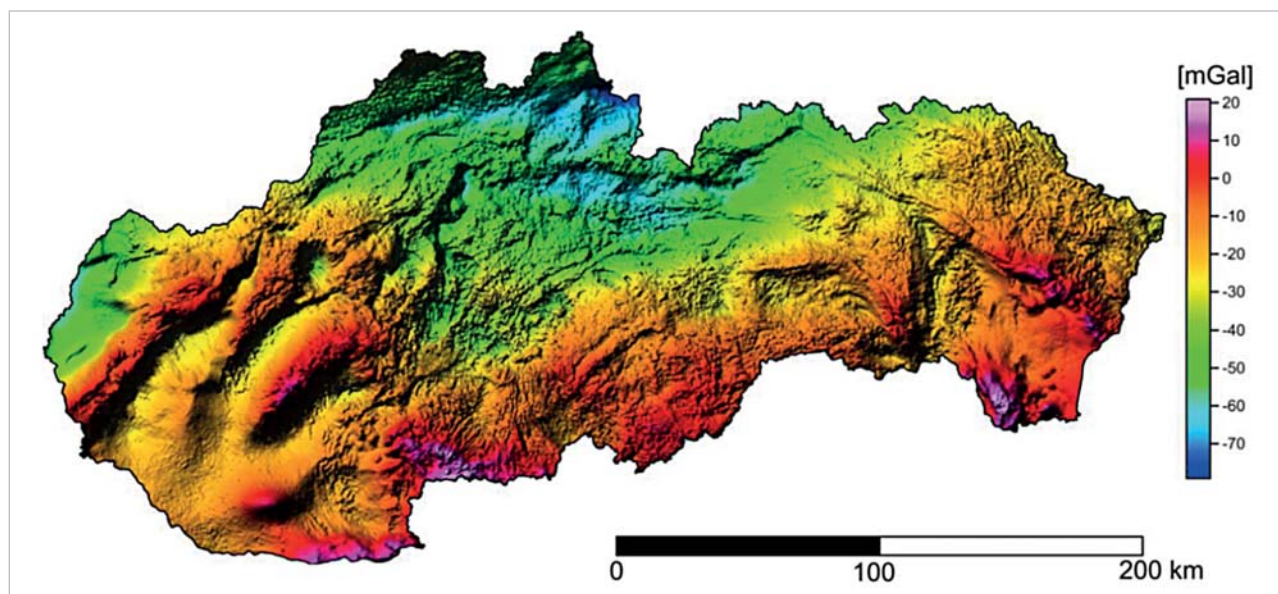
Z vypočítaných hodnôt korekcií z tiažového poľa Zeme  $C_{CD}^2$  pre prevýšenia medzi konkrétnymi bodmi I. rádu (**tab. 5**, 4. stĺpec) po zohľadnení vzťahu (14) je zrejmé, že ich vplyv na jednotlivé prevýšenia (**tab. 1**, stĺpec 3) určené v roku 1951 je zanedbateľný a tieto rozdiely medzi oboma vertikálnymi systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** môžeme označiť v tejto oblasti (na hraniciach Slovenska a Rakúska) za nevýznamné.

Analogicky to môžeme predpokladať aj o rozdieloch medzi vertikálnymi systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** určených na bodoch nivačného ťahu II. rádu (**tab. 2**, stĺpec 3).

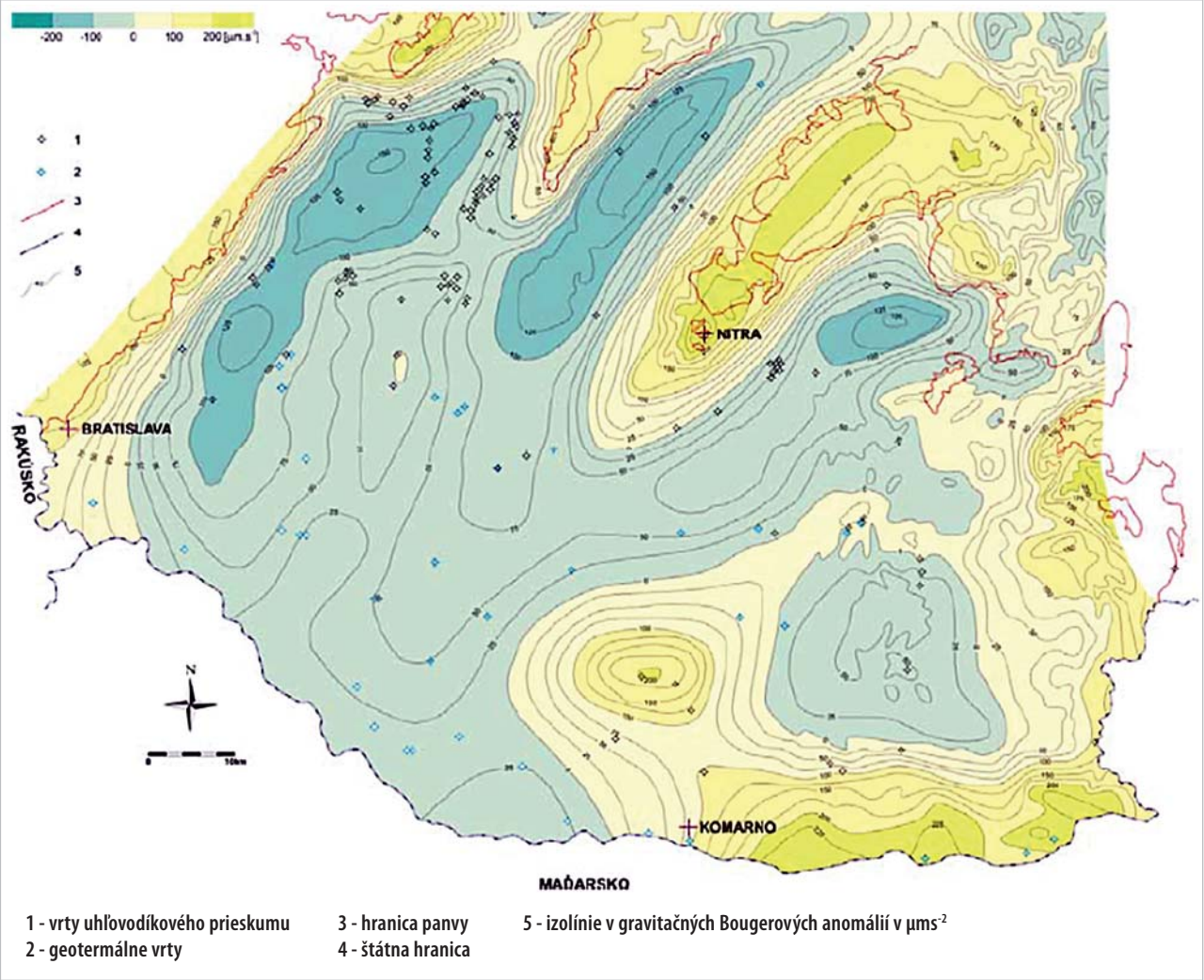
Je možné teda jednoznačne konštatovať, že obidva nivačné ťahy (nivačný ťah I. rádu – pozri **tab. 1**, nivačný ťah II. rádu – pozri **tab. 2**) majú spoľahlivo určené hodnoty rozdielov medzi vertikálnymi referenčnými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** v bodoch nivačných ťahov.

Táto množina údajov (nivačné body I. rádu a nivačné body II. rádu s hodnotami rozdielov medzi vertikálnymi referenčnými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)**) predstavuje vstupné parametre na vyinterpolovanie hodnôt rozdielov medzi vertikálnymi referenčnými systémami **Jadran<sub>CSJNS</sub> (1951)** a **Bpv (1951)** pre jednotlivé body s horizontálnymi S-JTSK súradnicami lokalizovanými v strede rieky Morava a Dunaj, v úseku od ústia rieky Dyje do rieky Morava, cez ústie rieky Morava do Dunaja pri Devíne a odtiaľ po Dunaji až po most Lafranconi v Bratislave (celková dĺžka je asi 78,3 km). Body sú vzdialené od seba po 250 m.

Hodnoty rozdielov vo vyššie uvedenom úseku boli vyinterpolované metódou Kriging. Výsledok je graficky ilustrovaný na **obr. 5**.



Obr. 3 Mapa úplných Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia



Obr. 4 Mapa Bougerových anomálií v podunajskej panve podľa Šefara et al. (1987)

Tab. 3 Odhadnuté hodnoty úplných Bougerových anomálií tiažového zrýchlenia v Podunajskej nížine na nivelačných bodoch I. rádu

Bod	Lokalita bodu	Odhadnutá hodnota Bougerovej anomálie (mGal)
CZA-520	Bratislava I – Staré Mesto, Brnianska 31	$\Delta g_{CZA-520} = (g - \gamma)_B = 12,5$
CZA-544	Bratislava IV – Lamač, Hodonínska 16	$\Delta g_{CZA-544} = (g - \gamma)_B = 12,5$
CZA-662.01	Veľké Leváre, okres Malacky	$\Delta g_{CZA-662.01} = (g - \gamma)_B = - 40,0$
CZA-673	Moravský Svätý Ján, okres Senica	$\Delta g_{CZA-673} = (g - \gamma)_B = - 40,0$
ZBZC-544	Sekule – Brodské, štátna hranica	$\Delta g_{ZBZC-544} = (g - \gamma)_B = - 40,0$

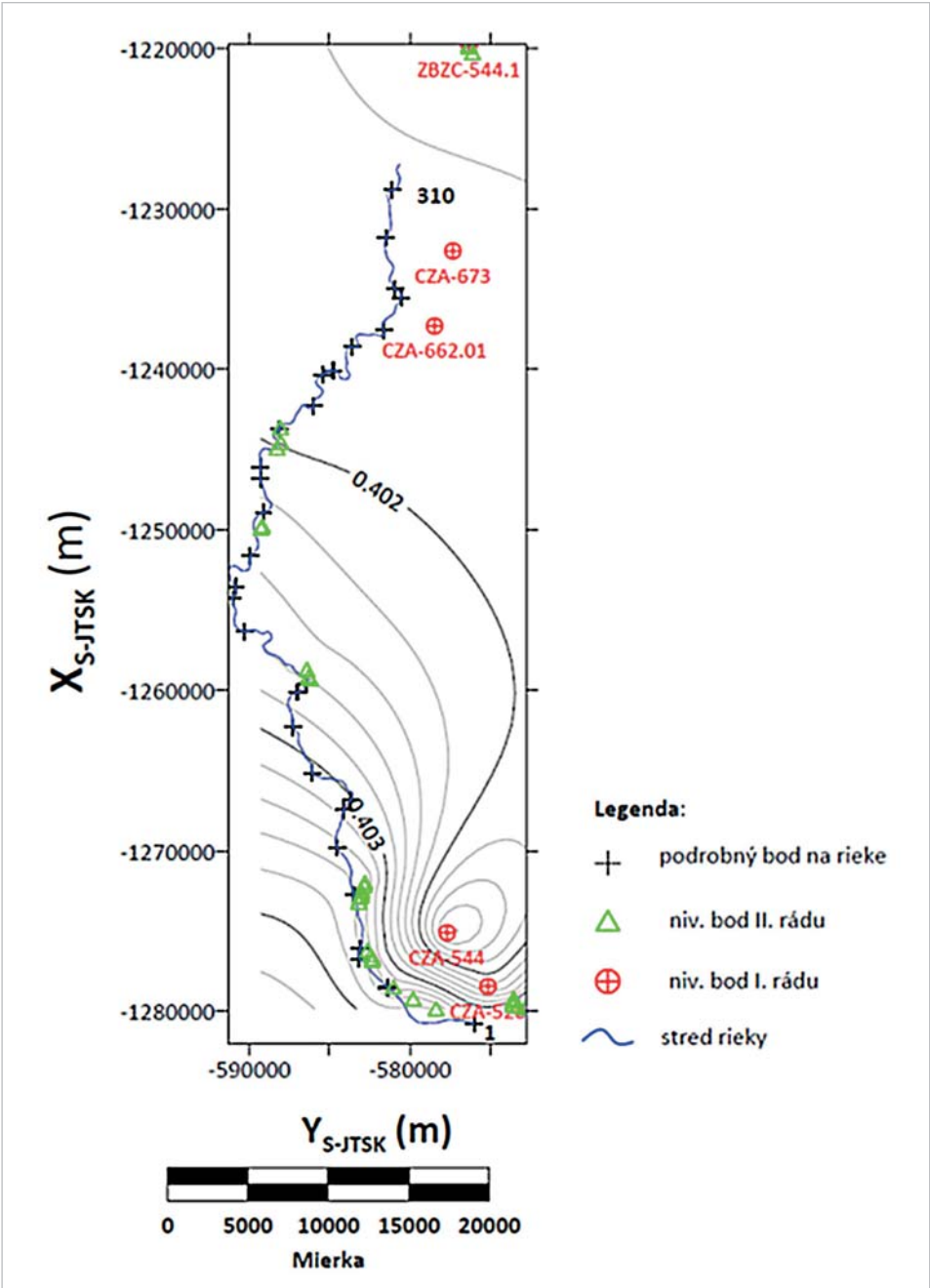
Tab. 4 Fayové anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu na nivelačných bodoch I. rádu

Bod	$H_{Bpv}$ (m)	Hodnota Fayovej anomálie tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu (mGal)
CZA-520	188,6289	$\Delta g_{F(CZA-520)} = (g - \gamma)_F = (g - \gamma)_B + 0,1119H = 33,608$
CZA-544	217,8081	$\Delta g_{F(CZA-544)} = (g - \gamma)_F = (g - \gamma)_B + 0,1119H = 36,873$
CZA-662.01	151,3466	$\Delta g_{F(CZA-662.01)} = (g - \gamma)_F = (g - \gamma)_B + 0,1119H = - 23,064$
CZA-673	152,1968	$\Delta g_{F(CZA-673)} = (g - \gamma)_F = (g - \gamma)_B + 0,1119H = - 22,969$
ZBZC-544	154,1453	$\Delta g_{F(ZBZC-544)} = (g - \gamma)_F = (g - \gamma)_B + 0,1119H = - 22,751$



Tab. 5 Výpočet korekcií z tiažového poľa Zeme  $C_{CD}^2$  medzi nivelačnými bodmi I. rádu

Úseky medzi dvomi bodmi	Nivelované prevýšenie medzi dvomi bodmi $\Delta H_{Bpv(CD)} = \Delta h_{CD}^{mer}$ (m)	Stredná hodnota Fayových anomálií medzi dvomi bodmi $\Delta g_{F(CD)} = (g - \gamma)_m$ (mGal)	Korekcia z tiažového poľa Zeme $C_{CD}^2$ medzi dvomi bodmi $C_{CD}^2 = 0,0010193 (g - \gamma)_m \Delta h_{CD}^{mer}$ (mm)
CZA-544 - CZA-520	29,1792	35,240	1,05
CZA-662.01 - CZA-544	-33,2308	6,904	-0,23
CZA-673 - CZA-662.01	0,8503	-23,017	-0,02
ZBZC-544 - CZA-673	1,9484	-22,860	-0,05
Suma všetkých korekcií z tiažového poľa Zeme $C^2$ na celom úseku:			0,75



Obr. 5 Interpolácia rozdielov medzi výškovými systémami  $Jadran_{\check{C}SJS}$  (1951) a Bpv (1951) na riekach Morava a Dunaj po most Lafranconi s celkovou dĺžkou úseku 78,3 km

V oblastiach, kde sa interpolácia metódou Kriging nedala aplikovať, boli rozdiely vertikálnych referenčných systémov **Jadran<sup>CSJNS</sup> (1951)** a **Bpv (1951)** určené lineárnou interpoláciou z najbližších bodov, ktoré mali hodnoty rozdielov medzi vertikálnymi referenčnými systémami **Jadran<sup>CSJNS</sup> (1951)** a **Bpv (1951)** z metódy Kriging ešte určené.

Výsledné hodnoty rozdielov medzi výškovými referenčnými systémami **Jadran<sup>CSJNS</sup> (1951)** a **Bpv (1951)** pre body v záujmovom úseku (spolu 315 bodov), ktoré sú lokalizované v strede rieky Morava a Dunaj s intervalom 250 m (spolu s uvedením ich horizontálnych S-JTSK súradníc) sú publikované v plnom rozsahu v Technickej správe [17] vypracovanej pre potreby Slovenského vodohospodárskeho podniku, OZ Bratislava. Ich hodnoty sa pohybujú na úrovni približne 40 cm s rozptylom 2 mm, pričom najnižšia hodnota výškovej diferencie je 0,4018 m a najvyššia hodnota výškovej diferencie je 0,4038 m.

Tieto hodnoty vertikálnych diferencií medzi jadranským výškovým systémom a Bpv boli v minulosti určené pre praktické používanie pri výmene výškových informácií medzi slovenskou a rakúskou stranou pri ich vzájomnej spolupráci na tomto spoločnom hraničnom úseku.

Presnosť určenia rozdielov je možné odhadnúť pomocou zákona o hromadení chýb, pričom pre oba vertikálne výškové systémy je uvažovaná stredná chyba z vyrovnania nivelačnej siete menšia ako 10 mm [4]:

$$\delta_{\Delta H} = \sqrt{(\delta_{HA}^2 + \delta_{HB}^2)} = 14 \text{ mm}.$$

Potreba praktickej transformácie medzi dvomi rôznymi výškovými referenčnými systémami (napr. **Jadran<sup>CSJNS</sup> (1951)** a **Bpv (1951)**) sa môže vyskytnúť aj v iných lokalitách na území SR, ako je, napr. lokalita areálu SLOVNAFT, a. s., lokalita banskoštiavnických tajchov a pod. Z vedeckého aspektu by bolo vhodné určiť rozdiely medzi vyššie uvedenými výškovými systémami v celej nivelačnej sieti SR, čím by sa predišlo možným chybám pri praktickom riešení.

#### 4. Výpočet výškových diferencií $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$ medzi aktuálne platným rakúskym jadranským vertikálnym systémom (System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875) a aktuálne platným slovenským vertikálnym systémom Bpv v osi hraničnej rieky Morava

Výpočet výškových diferencií  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}} = H_{\text{Adria}} - H_{\text{Bpv}}$  (ďalej len  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$ ) medzi aktuálne platnými vertikálnymi referenčnými systémami Rakúska (System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875, ďalej len Adria) a Slovenska (Bpv) lokalizovaných do osi (strednice) hraničnej rieky Morava s odstupom 250 m začínajúcich približne od sútoku riek Dyje a Moravy blízko styku česko-rakúsko-slovenskej hranice, po ústie rieky Morava do Dunaja pri Devíne a odtiaľ stredom Dunaja po most Lafranconi v Bratislave (315 bodov), bol realizovaný analogickým spôsobom ako je demonštrované v časti 3.

V tomto prípade je potrebné uviesť nasledovné skutočnosti (analogické tvrdenia platia aj pre výpočty realizované v časti 5 a 6):

- slovenské nivelačné body majú priamo meranú výšku v baltskom vertikálnom systéme Bpv ( $H_{\text{Bpv}}$ ), ale nemajú priamo meranú výšku v jadranskom vertikálnom systéme Adria,
- rakúske nivelačné body majú priamo meranú výšku v jad-

ranskom vertikálnom systéme Adria ( $H_{\text{Adria}}$ ), ale nemajú priamo meranú výšku vo vertikálnom systéme Bpv.

Aby bolo možné určiť výškové diferencie  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$  na týchto slovenských a rakúskych nivelačných bodoch, ktoré potom slúžili ako vstupné údaje pre interpoláciu metódu Kriging na určenie výškových diferencií  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$  na množine 315 bodov lokalizovaných v osi rieky Morava, bolo nutné určiť na nich aj výšky v druhom vertikálnom systéme, t.j. na slovenských nivelačných bodoch bolo potrebné určiť normálne ortometrické výšky  $H_{\text{Adria}}$  a na rakúskych nivelačných bodoch bolo potrebné určiť normálne výšky  $H_{\text{Bpv}}$ . Metóda presnej nivelácie neprichádzala do úvahy predovšetkým z ekonomických (ale aj časových) dôvodov. Ako alternatívu bolo možné využiť existenciu digitálnych modelov slovenského kvázigeoidu a rakúskeho geoidu, ktoré majú dostatočný presah v hraničnej oblasti do susedného štátu.

Postup výpočtu bol nasledovný:

- zo vstupných polohových a výškových geoúdajov slovenských nivelačných bodov ( $X_{\text{S-JTSK}}, Y_{\text{S-JTSK}}, H_{\text{Bpv}}$ ), ktoré mali všetky výšky určené priamym meraním z presnej nivelácie v baltskom vertikálnom referenčnom systéme Bpv, boli priestorovou transformáciou s využitím digitálneho modelu slovenského kvázigeoidu vypočítané geocentrické polohové súradnice  $\phi_{\text{ETRS-89}}, \lambda_{\text{ETRS-89}}$  a geocentrická elipsoidická výška  $h_{\text{GRS-80}}$ ,
- zo vstupných polohových a výškových geoúdajov rakúskych nivelačných bodov ( $X_{\text{GK-M-34}}, Y_{\text{GK-M-34}}, H_{\text{Adria}}$ ), ktoré mali všetky výšky určené priamym meraním z presnej nivelácie v jadranskom vertikálnom referenčnom systéme Adria, boli priestorovou transformáciou s využitím digitálneho modelu rakúskeho geoidu vypočítané geocentrické polohové súradnice  $\phi_{\text{ETRS-89}}, \lambda_{\text{ETRS-89}}$  a geocentrická elipsoidická výška  $h_{\text{GRS-80}}$ .

Týmito transformáciami mali všetky nivelačné body z oboch strán rieky Morava určené geocentrické elipsoidické výšky  $h_{\text{GRS-80}}$  takže bolo možné na slovenských nivelačných bodoch určiť normálne ortometrické výšky v aktuálne platnom rakúskom jadranskom vertikálnom systéme Adria aplikovaním digitálneho modelu rakúskeho geoidu. Analogicky, na rakúskych nivelačných bodoch bolo možné určiť normálne výšky v aktuálne platnom slovenskom baltskom vertikálnom systéme Bpv aplikovaním digitálneho modelu slovenského kvázigeoidu. To prakticky znamená, že na celej množine nivelačných bodov bolo možné určiť výškové diferencie  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$ .

Ako vstupné údaje, z ktorých boli odvodené vertikálne diferencie medzi rakúskym jadranským vertikálnym systémom Adria a slovenským vertikálnym systémom Bpv  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$  bolo použitých:

- 57 rakúskych nivelačných bodov s aktuálne platnými výškami v rakúskom jadranskom vertikálnom systéme Adria, ktoré boli určené presnou niveláciou a sú lokalizované vo vyššie uvedenom úseku na rakúskej strane v blízkosti pohraničnej rieky Morava,
- 52 slovenských nivelačných bodov s aktuálne platnými výškami v slovenskom vertikálnom systéme Bpv určených presnou niveláciou, ktoré sa nachádzajú na slovenskej strane v blízkosti pohraničnej rieky Morava.

Za rakúsku stranu geodetické údaje o 57 rakúskych nivelačných bodoch poskytol rakúsky spolkový úrad Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen z Viedne ([www.bev.gv.at](http://www.bev.gv.at)) a sú uvedené v tab. 6. Geodetické údaje o 52 slovenských nivelačných bodoch boli poskytnuté Geodetickým a kartografickým ústavom Bratislava ([www.gku.sk](http://www.gku.sk)), resp. časť z nich bola prebratá priamo z geoportálu ZBGIS (<https://zbgis.sk/geodesy.sk>) a sú uvedené v tab. 6.

Tab. 6 Geodetické údaje rakúskych a slovenských nivelačných bodov

Rakúske nivelačné body – 57 bodov s približnou polohou a aktuálnymi presnými normálnymi ortometrickými výškami (Adria) určenými presnou niveláciou				Slovenské nivelačné body – 52 bodov s približnou polohou a aktuálnymi presnými normálnymi výškami (Bpv) určenými presnou niveláciou			
Bod	Y <sub>GK_M-34</sub> (m)	X <sub>GK_M-34</sub> (m)	H <sub>Adria</sub> (m)	Bod	X <sub>S-JTSK</sub> (m)	Y <sub>S-JTSK</sub> (m)	H <sub>Bpv</sub> (m)
41209A	37 866,00	5 367 023,00	173,805	3441MA-53	1227102,07	580246,75	154,567
41210A	37 939,80	5 367 507,50	175,994	3443MA-42	1252510,72	591177,65	148,694
41211A	37 952,00	5 368 078,00	167,626	4422BA-1002	1274474,45	579239,59	256,721
41218	38 915,12	5 370 180,92	150,437	AZR-529	1280618,80	569354,32	134,342
41219	39 071,09	5 370 285,23	149,229	C59-509	1230730,16	571396,88	173,259
41220A	39 202,00	5 369 893,00	149,393	CZA-501	1279759,34	572785,25	141,523
41221A	39 324,00	5 369 811,00	146,128	CZA-503	1279656,07	573295,73	152,761
41232A	40 421,90	5 373 219,10	153,014	CZA-505	1279603,79	573585,90	159,677
41233	40 866,41	5 373 071,43	150,755	CZA-506	1279381,32	573568,09	162,813
41236	40 257,43	5 373 731,17	158,419	CZA-508	1279260,68	573504,27	166,283
41253	42 140,36	5 377 893,23	154,971	CZA-509	1279169,67	573547,03	176,052
41256	42 322,47	5 377 871,76	153,288	CZA-520	1278448,87	575144,40	188,629
41285A	43 455,60	5 384 935,00	153,318	CZA-544	1275092,81	577690,00	217,808
41285B	44 153,63	5 385 118,02	153,532	CZA-644	1242166,13	576971,78	155,882
41285C	44 316,50	5 384 941,20	151,086	CZA-662.01	1237279,37	578462,14	151,346
41285D	44 319,50	5 384 928,70	151,213	CZA-673	1232601,36	577324,40	152,197
41285E	44 320,00	5 384 848,00	151,829	ZA1-505	1279829,77	578371,14	140,722
41184A	37 229,00	5 360 807,20	144,824	ZA1-510	1279212,53	579805,55	143,138
41184B	37 267,49	5 360 755,07	144,072	ZA1-516	1278457,07	581033,46	152,522
41184C	37 163,00	5 360 653,30	144,333	ZA1-521	1276818,83	582349,61	147,088
41184D	37 160,20	5 360 658,80	144,918	ZA1-522	1276659,97	582329,15	157,812
41184E	37 171,00	5 360 648,00	141,111	ZA1-525	1276472,47	582464,35	152,719
41095C	44 914,40	5 345 028,90	148,390	ZA1-526	1276183,70	582626,21	149,441
41096	45 410,20	5 344 958,30	150,358	ZA1-537	1273182,86	583167,77	142,248
41096A	45 175,70	5 344 975,80	150,133	ZA1-539	1272905,53	583134,29	145,562
41097	45 360,90	5 344 946,00	145,920	ZA2-500	1272776,10	583008,26	149,718
41097A	45 378,20	5 344 945,90	144,253	ZA2-501	1272512,63	582970,64	150,977
41097	45 506,80	5 344 946,95	141,232	ZA2-502	1272181,68	582866,73	151,913
41099	45 557,90	5 344 985,00	140,224	ZA2-503	1271952,21	582803,78	143,447
41102	45 598,10	5 344 950,10	150,630	ZA5-505	1273262,42	580822,62	163,994
41103	45 599,50	5 344 941,90	150,622	ZA10-517	1259252,89	586200,15	145,335
41074	46 930,40	5 339 325,20	144,704	ZA10-518	1259080,03	586324,41	144,622
41075	46 856,86	5 339 414,84	141,437	ZA10-520	1258685,29	586408,11	145,084
41075B	46 648,46	5 339 476,12	144,603	ZA18-511.02	1243611,38	588055,69	145,445
41076	46 324,37	5 339 646,66	143,730	ZA18-513	1244552,74	588021,15	145,728
38840C	46 174,39	5 335 628,68	197,460	ZA18-513.02	1244870,79	588271,87	145,622
38840D	46 495,60	5 335 785,80	224,317	ZA18-530	1249733,66	589184,73	146,412
38840E	46 605,59	5 335 453,05	285,792	ZA18-532	1249883,44	589261,04	145,316
38849	47 902,80	5 334 089,10	161,604	ZA18-537	1251644,28	589388,25	143,966
38856	49 795,00	5 333 494,70	148,519	ZA19-509	1251583,89	586310,29	146,381
38867	51 495,00	5 332 494,99	141,247	ZA21-507	1244602,79	582269,87	150,091
38868D	53 818,80	5 331 729,40	141,688	ZA23-505	1240779,73	578765,43	152,865
41138A	40 138,23	5 352 720,15	144,688	ZA23-511	1242413,49	580750,82	151,106
41138B	40 327,70	5 353 055,60	143,294	ZA2B-520	1229017,49	581356,84	150,244
41138C	39 979,80	5 353 247,40	143,672	ZBZC-509	1226781,94	576932,10	152,050
41138D	39 974,76	5 353 713,40	141,870	ZBZC-539	1220244,48	576105,64	155,023
41201	37 912,83	5 363 771,23	149,856	ZBZC-540	1219901,90	576293,36	154,667
41202	38 063,00	5 363 810,37	149,130	ZBZC-541	1219830,29	576331,94	154,682
41203	38 063,02	5 363 811,00	150,748	ZBZC-544	1219729,46	576333,79	154,145
41268	39 883,80	5 380 345,67	162,033	ZC7-513	1218886,94	572948,74	161,650
41269	40 020,55	5 380 401,75	157,634	ZNSBA2-507	1287533,95	577099,13	134,443
41270	40 570,35	5 380 659,10	153,622	ZNSBA11-502	1282500,93	569173,24	135,438
41271A	41 054,70	5 381 112,35	155,754	4424BA-1021*	1290550,66	562356,95	128,688
41299	42 162,40	5 390 293,60	168,543	4424BA-1024*	1294172,28	566034,08	134,707
41300	42 162,43	5 390 293,64	170,040	C8-516*	1258610,34	573389,83	212,189
41301	42 069,50	5 390 442,65	170,412	CZA-610*	1254610,75	577682,49	167,175
41302	41 916,99	5 390 345,39	168,568	CZC-531*	1226422,39	567555,30	167,166



Na tomto mieste je nutné poznamenať, že aj na slovenskej strane bol zvolený rovnaký počet nivelačných bodov (57), ako na strane rakúskej. Dôvodom vylúčenia 5 slovenských nivelačných bodov (4424BA-1021, 4424BA-1024, C8-516, CZA-610 a CZC-531 označených \* v **tab. 6**) z výpočtov bola skutočnosť, že v rakúskom modeli geoidu v lokalite výskytu vyššie spomínaných bodov nebolo možné realizovať spoľahlivú interpoláciu.

Ako prvý krok bolo nevyhnutné určiť vertikálne diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  medzi rakúskym výškovým jadranským systémom (Adria) a slovenským baltským výškovým systémom (Bpv) na všetkých 109 nivelačných bodov pozdĺž hraničnej rieky Morava v úseku približne od juhovýchodnej časti Bratislavy po Sekule, ktoré sa stali východiskovými hodnotami pre určenie vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na bodoch lokalizovaných v osi pohraničnej rieky Morava na úseku dlhom viac ako 78 km a vzdialených od seba 250 m. To predstavuje dokopy 315 bodov s určenými výškovými diferenciami  $\Delta H_{Adria-Bpv}$ . Tieto výškové diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  je možné určiť:

- využitím slovenského modelu kvázigeoidu DVRM05, verzia 05.2005 s výškovou presnosťou na úrovni 3 cm (stredná chyba reziduí  $1\sigma$  na testovacích bodoch dosiahla hodnotu 34 mm, pozri <https://www.geoportal.sk/sk/geodeticke-zaklady/geodeticke-systemy-transformacie/>), ktorý slúži na transformáciu globálnych elipsoidických výšok vzťahnutých na geocentrický elipsoid GRS80, na normálne výšky v slovenskom baltskom vertikálnom systéme Bpv pre územie Slovenska,
- využitím rakúskeho modelu geoidu s výškovou presnosťou v rovinatých oblastiach na úrovni 3 cm (stredná chyba reziduí  $1\sigma$  na testovacích bodoch dosiahla hodnotu 35 mm, pozri [http://www.bev.gv.at/portal/page?\\_pageid=713,2363173&\\_dad=portal&\\_schema=PORTAL](http://www.bev.gv.at/portal/page?_pageid=713,2363173&_dad=portal&_schema=PORTAL)), ktorý slúži na transformáciu globálnych elipsoidických výšok vzťahnutých na geocentrický elipsoid GRS80, na normálne ortometrické výšky v rakúskom jadranskom vertikálnom systéme Adria.

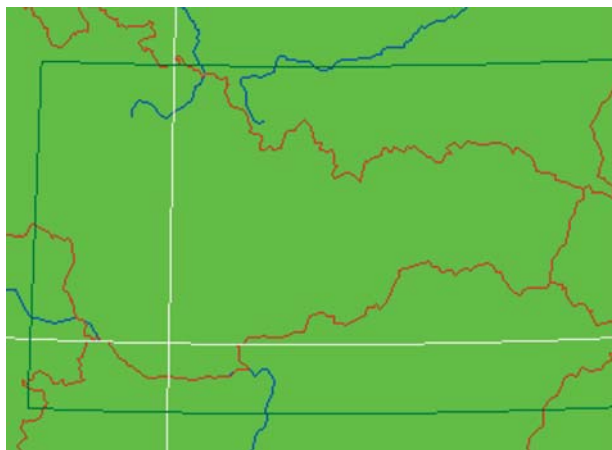
Samozrejme, oba modely – jednak model slovenského kvázigeoidu, jednak model rakúskeho geoidu, musia mať dostatočný prekryt v pohraničnej oblasti, s dostatočným presahom (aspoň niekoľko km) do susedného štátu, čo oba modely spĺňajú. Je nutné tiež poznamenať, že oba modely (rakúsky geoid a slovenský kvázigeoid) obsahujú „stredný“ slapový model (mean tide model).

Schématické pokrytie územia modelom slovenského kvázigeoidu je ilustrované na **obr. 6**. Slovenský kvázigeoid pokrýva územie v smere z juhu na sever medzi zemepisnými šírkami  $N47^{\circ}30'10.00800''$  a  $N49^{\circ}59'49.99200''$  a v smere zo západu na východ medzi zemepisnými dĺžkami  $E16^{\circ}30'15.01200''$  a  $E22^{\circ}59'44.98800''$ .

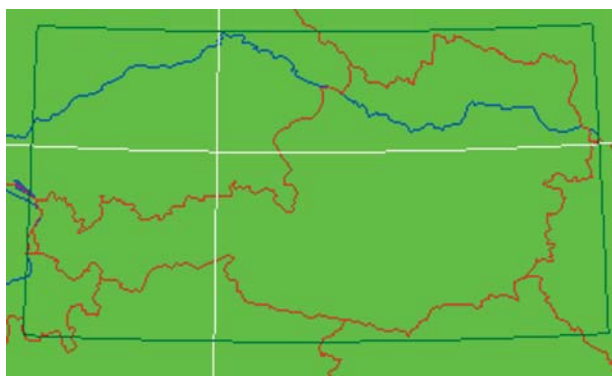
Schématické pokrytie územia modelom rakúskeho geoidu je ilustrované na **obr. 7**. Rakúsky geoid pokrýva územie v smere z juhu na sever medzi zemepisnými šírkami  $N46^{\circ}20'30.00000''$  a  $N49^{\circ}03'15.00000''$  a v smere zo západu na východ medzi zemepisnými dĺžkami  $E9^{\circ}28'52.50000''$  a  $E17^{\circ}12'22.50000''$ .

Prekryt oboch modelov v pohraničnej oblasti rieky Morava v smere sever – juh predstavuje hodnotu  $1^{\circ}33'04.992''$  (približne 172,5 km) a v smere východ – západ  $0^{\circ}42'07.488''$  (približne 50,3 km), čo je pre účely určenia výškových diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  v pohraničnej oblasti rieky Morava postačujúce.

Hoci absolútna polohová presnosť rakúskych a slovenských nivelačných bodov je nízka a vo všeobecnosti sa pohybuje na úrovni 1-5 m (až na niektoré výnimky, hlavne



*Obr. 6 Geografický rozsah modelu slovenského kvázigeoidu DVRM05, ver. 05.2005 pre výpočet normálnych výšok v baltskom systéme Bpv z globálnych elipsoidických výšok GRS80*



*Obr. 7 Geografický rozsah modelu rakúskeho geoidu pre výpočet jadranských normálnych ortometrických výšok vo vertikálnom systéme Adria z geocentrických elipsoidických výšok GRS80*

na slovenských nivelačných bodoch, kde je polohová presnosť na cm úrovni), tento fakt nemá prakticky žiadny negatívny vplyv na určenie výškových diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  medzi oboma výškovými systémami Adria a Bpv, keď zoberieme do úvahy tieto kľúčové skutočnosti:

- celá blízka oblasť pohraničnej rieky Morava na rakúsko-slovenskej hranici je takmer rovinatá,
- krok diskretných bodov mriežky modelu slovenského kvázigeoidu, v ktorom sa vykonáva kvadratická interpolácia na určenie výšok kvázigeoidu v bodoch mimo mriežky je približne 600 m x 600 m,
- krok diskretných bodov mriežky modelu rakúskeho geoidu, v ktorom sa vykonáva kvadratická interpolácia na určenie výšok geoidu v bodoch mimo mriežky je približne 500 m x 500 m.

**Tab. 7** obsahuje výškové diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  určené vyššie uvedeným spôsobom na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch. Výšky vo vertikálnom systéme Bpv na rakúskych nivelačných bodoch boli získané použitím modelu slovenského kvázigeoidu a výšky v jadranskom vertikálnom systéme Adria na slovenských nivelačných bodoch boli získané použitím modelu rakúskeho geoidu. Rozdiely  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na rakúskych nivelačných bodoch sa pohybuje v intervale **0,526 m – 0,563 m** (rozptyl rozdielov je

Tab. 7 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov				Slovenské nivelačné body – 52 bodov			
Bod	$H_{Adria}$ (m)	$H_{Bpv}$ (m)	$\Delta H_{Adria-Bpv}$ (m)	Bod	$H_{Adria}$ (m)	$H_{Bpv}$ (m)	$\Delta H_{Adria-Bpv}$ (m)
38840C	197,460	196,903	0,557	3441MA-53	155,115	154,567	0,548
38840D	224,317	223,760	0,557	3443MA-42	149,246	148,694	0,552
38840E	285,792	285,238	0,554	4422BA-1002	257,278	256,721	0,557
38849	161,604	161,059	0,545	AZR-529	134,699	134,342	0,357
38856	148,519	147,978	0,541	C59-509	173,812	173,259	0,553
38867	141,247	140,711	0,536	CZA-501	141,983	141,523	0,460
38868D	141,688	141,154	0,534	CZA-503	153,235	152,761	0,474
41074	144,704	144,143	0,561	CZA-505	160,159	159,677	0,482
41075	141,437	140,876	0,561	CZA-506	163,297	162,813	0,484
41075B	144,603	144,042	0,561	CZA-508	166,765	166,283	0,482
41076	143,730	143,167	0,563	CZA-509	176,537	176,052	0,485
41095C	148,390	147,840	0,550	CZA-520	189,146	188,629	0,517
41096	150,358	149,810	0,548	CZA-544	218,347	217,808	0,539
41096A	150,133	149,585	0,548	CZA-644	156,399	155,882	0,517
41097	145,920	145,372	0,548	CZA-662.01	151,858	151,346	0,512
41097A	144,253	143,705	0,548	CZA-673	152,707	152,197	0,510
41098	141,232	140,685	0,547	ZA1-505	141,260	140,722	0,538
41099	140,224	139,678	0,546	ZA1-510	143,678	143,138	0,540
41102	150,630	150,083	0,547	ZA1-516	153,066	152,522	0,544
41103	150,622	150,075	0,547	ZA1-521	147,638	147,088	0,550
41138A	144,688	144,140	0,548	ZA1-522	158,362	157,812	0,550
41138B	143,294	142,747	0,547	ZA1-525	153,270	152,719	0,551
41138C	143,672	143,123	0,549	ZA1-526	149,994	149,441	0,553
41138D	141,870	141,322	0,548	ZA1-537	142,801	142,248	0,553
41184A	144,824	144,274	0,550	ZA1-539	146,114	145,562	0,552
41184B	144,072	143,522	0,550	ZA2-500	150,268	149,718	0,550
41184C	144,333	143,782	0,551	ZA2-501	151,525	150,977	0,548
41184D	144,918	144,367	0,551	ZA2-502	152,459	151,913	0,546
41184E	141,111	140,560	0,551	ZA2-503	143,991	143,447	0,544
41201	149,856	149,310	0,546	ZA5-505	164,550	163,994	0,556
41202	149,130	148,586	0,544	ZA10-517	145,877	145,335	0,542
41203	150,748	150,204	0,544	ZA10-518	145,164	144,622	0,542
41209A	173,805	173,253	0,552	ZA10-520	145,626	145,084	0,542
41210A	175,994	175,445	0,549	ZA18-511.02	145,981	145,445	0,536
41211A	167,626	167,077	0,549	ZA18-513	146,262	145,728	0,534
41218	150,437	149,896	0,541	ZA18-513.02	146,158	145,622	0,536
41219	149,229	148,692	0,537	ZA18-530	146,955	146,412	0,543
41220A	149,393	148,854	0,539	ZA18-532	145,860	145,316	0,544
41221A	146,128	145,590	0,538	ZA18-537	144,513	143,966	0,547
41232A	153,014	152,477	0,537	ZA19-509	146,893	146,381	0,512
41233	150,755	150,223	0,532	ZA21-507	150,594	150,091	0,503
41236	158,419	157,884	0,535	ZA23-505	153,357	152,865	0,492
41253	154,971	154,444	0,527	ZA23-511	151,626	151,106	0,520
41256	153,288	152,762	0,526	ZA2B-520	150,790	150,244	0,546
41268	162,033	161,486	0,547	ZBZC-509	152,572	152,050	0,522
41269	157,634	157,086	0,548	ZBZC-539	155,512	155,023	0,489
41270	153,622	153,077	0,545	ZBZC-540	155,153	154,667	0,486
41271A	155,754	155,202	0,552	ZBZC-541	155,168	154,682	0,486
41285A	153,318	152,768	0,550	ZBZC-544	154,630	154,145	0,485
41285B	153,532	152,985	0,547	ZC7-513	162,124	161,650	0,474
41285C	151,086	150,540	0,546	ZNSBA2-507	134,984	134,443	0,541
41285D	151,213	150,667	0,546	ZNSBA11-502	135,796	135,438	0,358
41285E	151,829	151,283	0,546	4424BA-1021*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41299	168,543	167,984	0,559	4424BA-1024*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41300	170,040	169,481	0,559	C8-516*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41301	170,412	169,852	0,560	CZA-610*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41302	168,568	168,007	0,561	CZC-531*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný

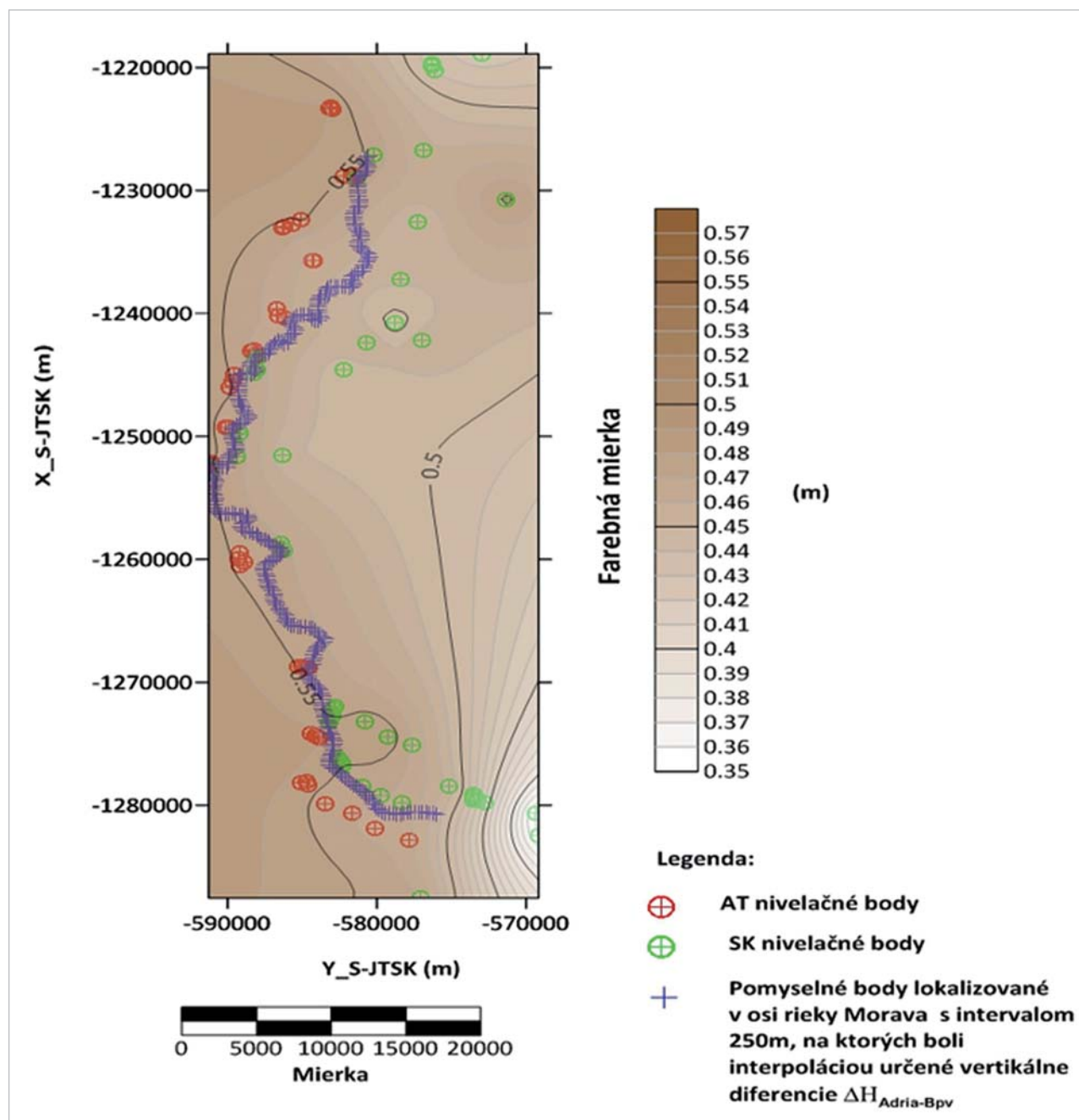
0,037 m). Na slovenských nivelačných bodoch v intervale 0,357 m – 0,557 m (rozptyl rozdielov je 0,200 m). Veľký, až 20 cm rozptyl na slovenských nivelačných bodoch je spôsobený dvomi výraznými výškovými diferenciami  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na bodoch AZR-529 (0,357 m) a ZNSBA11-502 (0,358 m) nachádzajúcich sa v k.ú. Bratislava-Ružinov. Bez týchto 2 bodov by bol rozptyl 9,7 cm. Možné vysvetlenie veľkého rozptylu rozdielov  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na slovenských nivelačných bodoch spočíva v nehomogénnom určení ich normálnych výšok vstupujúcich do výpočtu. V prípade bodov AZR-529 a ZNSBA11-502 by bolo vhodné preveriť ich aktuálnu výšku Bpv opätovným vykonaním presnej nivelácie.

Vertikálne diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  v tab. 7 (4. a 8. stĺpec) predstavujú vstupy na výpočet týchto diferencií pre všet-

ky body lokalizované do osi rieky Morava s intervalom 250 m. Ich hodnoty boli určené interpolačnou metódou Kriging a ich grafický priebeh je ilustrovaný na obr. 8.

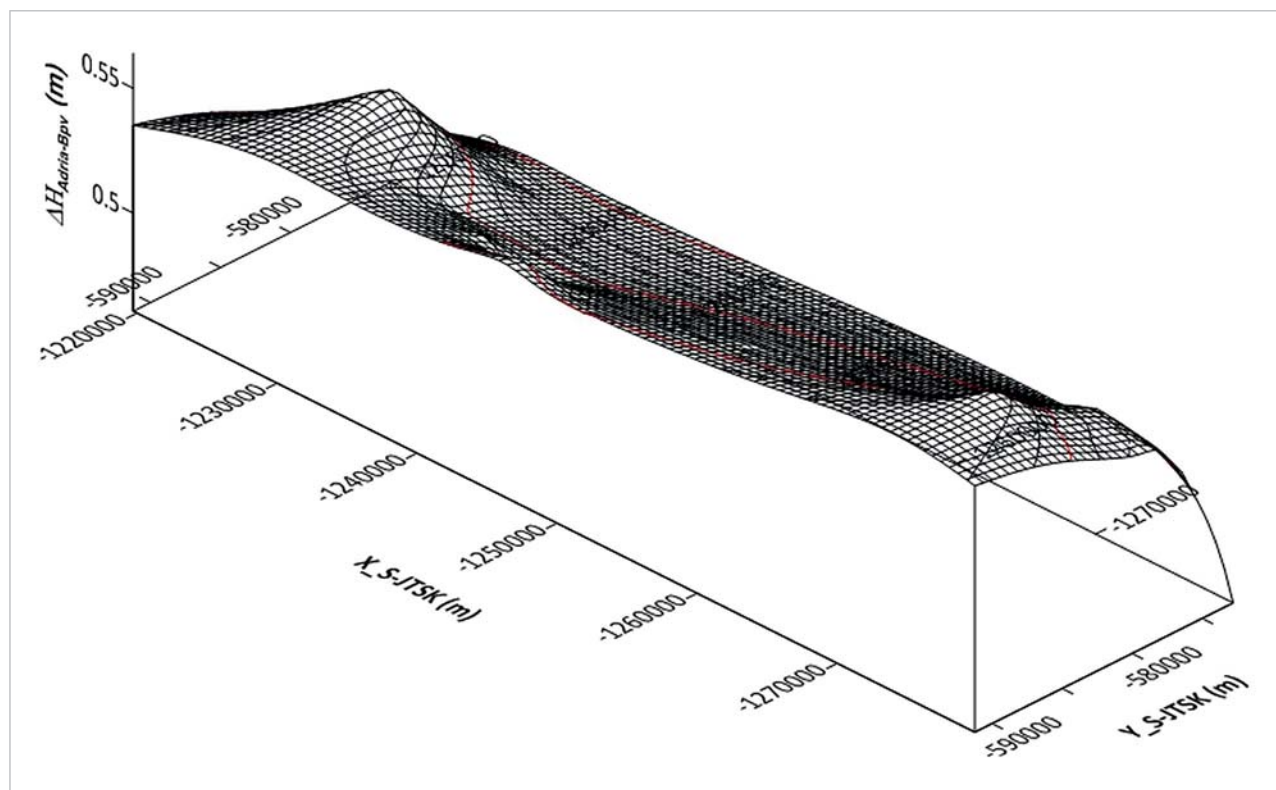
Iný spôsob grafickej ilustrácie vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  s využitím ortografickej projekcie je demonštrovaný na obr. 9.

Priemerná hodnota vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na všetkých rakúskych a slovenských nivelačných bodoch (spolu je to množina 109 bodov) je 0,534 m. Kladné hodnoty vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  znamenajú, že východiskový nulový bod v rakúskom jadranskom vertikálnom referenčnom systéme Adria (bod s normálnou ortometrickou výškou  $H_{Adria} = 0$  m v Terste) je nižšie ako východiskový nulový bod v baltškom vertikálnom referenč-



Obr. 8 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  medzi rakúskym jadranským výškovým systémom (Adria, Terst) a slovenským baltškým výškovým systémom (Bpv, Kronštadt) na pohraničnej rieke Morava





Obr. 9 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  medzi rakúskym jadranským výškovým systémom (Adria, Terst) a slovenským baltským výškovým systémom (Bpv, Kronštadt) na pohraničnej rieke Morava v ortografickej projekcii

nom systéme Bpv (bod s normálnou výškou  $H_{Bpv} = 0$  m v Kronštade). V tab. 8 sú uvedené rezíduá na jednotlivých nivelačných bodoch, z ktorých bola vypočítaná jednotková stredná chyba  $\sigma_0 = 33$  mm a stredná chyba aritmetického priemeru vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$   $\sigma = 3$  mm.

Exaktné numerické hodnoty vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na všetkých 315 bodoch polohovo lokalizovaných v osi hraničnej rieky Morava nie sú tu uvedené z priestorových dôvodov, keďže tabuľka s 315 bodmi by bola priestorovo veľmi rozsiahla. Hodnoty týchto vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  sa pohybujú v intervale od 0,515 m do 0,558 m (rozptyl rozdielov je 0,043 m).

#### 5. Výpočet výškových diferencií $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ medzi aktuálne platným slovenským baltským vertikálnym referenčným systémom Bpv a európskym vertikálnym referenčným rámcom EVRF2007 v osi hraničnej rieky Morava

Analogickým postupom ako je uvedený v časti 4 (jediný rozdiel je v tom, že do výpočtu bolo prirátaných 5 slovenských nivelačných bodov, ktoré boli predtým vylúčené – vid' časť 4), boli vypočítané vertikálne diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv} = H_{EVRF2007} - H_{Bpv}$  (ďalej len  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ ) medzi výškovými referenčnými systémami EVRF2007 a Bpv v rovnakej oblasti pohraničnej rieky Morava, na identickej množine rakúskych a slovenských nivelačných bodov (pozri tab. 6) ako v prípade výpočtu vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  a následne pre všetkých 315 bodoch polohovo lokalizovaných v osi rieky Morava a vzdialených od seba 250 m.

Je tiež nutné zdôrazniť, že na výpočet vertikálnych diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  na rakúskych nivelačných bodoch boli použité výšky vo vertikálnom referenčnom systéme Bpv určené použitím digitálneho modelu slovenského kvázigeoidu DVRM05, zatiaľ čo výšky vo vertikálnom systéme Bpv na slovenských nivelačných bodoch sú priamo merané výšky metódou presnej nivelácie. Dôvodom ponechania rakúskych nivelačných bodov s výškami vo vertikálnom systéme Bpv odvodenými aplikovaním slovenského modelu kvázigeoidu DVRM05 do výpočtu vertikálnych diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  bola snaha zachovať čo najväčšiu množinu nivelačných bodov, na ktorých boli určené vertikálne diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ , ktoré potom slúžili ako vstupné hodnoty na určenie vertikálnych diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  na 315 bodoch lokalizovaných v osi rieky Morava interpolačnou metódou Kriging.

Na určenie normálnych výšok vo vertikálnom systéme EVRF2007 bol použitý digitálny model kvázigeoidu DMOQSK2014-E, verzia 06.2014 s výškovou presnosťou na úrovni 2,3 cm (stredná chyba rezíduí 1σ na testovacích bodoch dosiahla hodnotu 23 mm, pozri <https://www.geoportal.sk/sk/geodeticke-zaklady/geodeticke-systemy-transformacie/>). Jeho geografický rozsah je ilustrovaný na obr. 10.

Tento kvázigeoid pokrýva celé územie Slovenska s presahom do susedných štátov a je ohraničený zemepisnými šírkami od N47°30'29.98000" do N49°59'29.98400" a zemepisnými dĺžkami od E16°30'44.98802" do E22°59'15.01198".

Vertikálne diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  v tab. 9 (4. a 8. stĺpec) predstavujú vstupy na výpočet týchto diferencií pre všetky pomyselné body lokalizované do osi rieky Morava s intervalom 250 m. Ich hodnoty boli určené interpolačnou metódou Kriging a ich grafický priebeh je ilustrovaný na obr. 11.

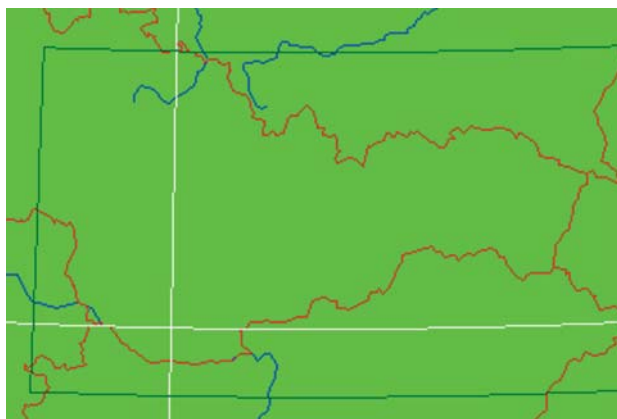
Tab. 8 Rezíduá vertikálnych diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov			Slovenské nivelačné body – 52 bodov		
Bod	$\Delta H_{Adria-Bpv}$ (m)	Rezíduá (m)	Bod	$\Delta H_{Adria-Bpv}$ (m)	Rezíduá (m)
38840C	0,557	-0,023	3441MA-53	0,548	-0,014
38840D	0,557	-0,023	3443MA-42	0,552	-0,018
38840E	0,554	-0,020	4422BA-1002	0,557	-0,023
38849	0,545	-0,011	AZR-529	0,357	0,177
38856	0,541	-0,007	C59-509	0,553	-0,019
38867	0,536	-0,002	CZA-501	0,460	0,074
38868D	0,534	0,000	CZA-503	0,474	0,060
41074	0,561	-0,027	CZA-505	0,482	0,052
41075	0,561	-0,027	CZA-506	0,484	0,050
41075B	0,561	-0,027	CZA-508	0,482	0,052
41076	0,563	-0,029	CZA-509	0,485	0,049
41095C	0,550	-0,016	CZA-520	0,517	0,017
41096	0,548	-0,014	CZA-544	0,539	-0,005
41096A	0,548	-0,014	CZA-644	0,517	0,017
41097	0,548	-0,014	CZA-662.01	0,512	0,022
41097A	0,548	-0,014	CZA-673	0,510	0,024
41098	0,547	-0,013	ZA1-505	0,538	-0,004
41099	0,546	-0,012	ZA1-510	0,540	-0,006
41102	0,547	-0,013	ZA1-516	0,544	-0,010
41103	0,547	-0,013	ZA1-521	0,550	-0,016
41138A	0,548	-0,014	ZA1-522	0,550	-0,016
41138B	0,547	-0,013	ZA1-525	0,551	-0,017
41138C	0,549	-0,015	ZA1-526	0,553	-0,019
41138D	0,548	-0,014	ZA1-537	0,553	-0,019
41184A	0,550	-0,016	ZA1-539	0,552	-0,018
41184B	0,550	-0,016	ZA2-500	0,550	-0,016
41184C	0,551	-0,017	ZA2-501	0,548	-0,014
41184D	0,551	-0,017	ZA2-502	0,546	-0,012
41184E	0,551	-0,017	ZA2-503	0,544	-0,010
41201	0,546	-0,012	ZA5-505	0,556	-0,022
41202	0,544	-0,010	ZA10-517	0,542	-0,008
41203	0,544	-0,010	ZA10-518	0,542	-0,008
41209A	0,552	-0,018	ZA10-520	0,542	-0,008
41210A	0,549	-0,015	ZA18-511.02	0,536	-0,002
41211A	0,549	-0,015	ZA18-513	0,534	0,000
41218	0,541	-0,007	ZA18-513.02	0,536	-0,002
41219	0,537	-0,003	ZA18-530	0,543	-0,009
41220A	0,539	-0,005	ZA18-532	0,544	-0,010
41221A	0,538	-0,004	ZA18-537	0,547	-0,013
41232A	0,537	-0,003	ZA19-509	0,512	0,022
41233	0,532	0,002	ZA21-507	0,503	0,031
41236	0,535	-0,001	ZA23-505	0,492	0,042
41253	0,527	0,007	ZA23-511	0,520	0,014
41256	0,526	0,008	ZA2B-520	0,546	-0,012
41268	0,547	-0,013	ZBZC-509	0,522	0,012
41269	0,548	-0,014	ZBZC-539	0,489	0,045
41270	0,545	-0,011	ZBZC-540	0,486	0,048
41271A	0,552	-0,018	ZBZC-541	0,486	0,048
41285A	0,550	-0,016	ZBZC-544	0,485	0,049
41285B	0,547	-0,013	ZC7-513	0,474	0,060
41285C	0,546	-0,012	ZNSBA2-507	0,541	-0,007
41285D	0,546	-0,012	ZNSBA11-502	0,358	0,176
41285E	0,546	-0,012	4424BA-1021*	neuvažovaný	neuvažovaný
41299	0,559	-0,025	4424BA-1024*	neuvažovaný	neuvažovaný
41300	0,559	-0,025	C8-516*	neuvažovaný	neuvažovaný
41301	0,560	-0,026	CZA-610*	neuvažovaný	neuvažovaný
41302	0,561	-0,027	CZC-531*	neuvažovaný	neuvažovaný

Tab. 9 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov				Slovenské nivelačné body – 52 bodov			
Bod	$H_{EVRF2007}$ (m)	$\Delta H_{Bpv}$ (m)	$H_{EVRF2007-Bpv}$ (m)	Bod	$H_{EVRF2007}$ (m)	$H_{Bpv}$ (m)	$\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ (m)
38840C	197,031	196,903	0,128	3441MA-53	154,687	154,567	0,120
38840D	223,888	223,760	0,128	3443MA-42	148,819	148,694	0,125
38840E	285,366	285,238	0,128	4422BA-1002	256,850	256,721	0,129
38849	161,186	161,059	0,127	AZR-529	134,463	134,342	0,121
38856	148,106	147,978	0,128	C59-509	173,380	173,259	0,121
38867	140,838	140,711	0,127	CZA-501	141,648	141,523	0,125
38868D	141,280	141,154	0,126	CZA-503	152,885	152,761	0,124
41074	144,271	144,143	0,128	CZA-505	159,801	159,677	0,124
41075	141,004	140,876	0,128	CZA-506	162,938	162,813	0,125
41075B	144,169	144,042	0,127	CZA-508	166,408	166,283	0,125
41076	143,296	143,167	0,129	CZA-509	176,178	176,052	0,126
41095C	147,968	147,840	0,128	CZA-520	188,754	188,629	0,125
41096	149,938	149,810	0,128	CZA-544	217,933	217,808	0,125
41096A	149,712	149,585	0,127	CZA-644	156,004	155,882	0,122
41097	145,499	145,372	0,127	CZA-662.01	151,467	151,346	0,121
41097A	143,832	143,705	0,127	CZA-673	152,318	152,197	0,121
41098	140,812	140,685	0,127	ZA1-505	140,848	140,722	0,126
41099	139,805	139,678	0,127	ZA1-510	143,264	143,138	0,126
41102	150,211	150,083	0,128	ZA1-516	152,649	152,522	0,127
41103	150,202	150,075	0,127	ZA1-521	147,216	147,088	0,128
41138A	144,266	144,140	0,126	ZA1-522	157,940	157,812	0,128
41138B	142,873	142,747	0,126	ZA1-525	152,847	152,719	0,128
41138C	143,249	143,123	0,126	ZA1-526	149,569	149,441	0,128
41138D	141,448	141,322	0,126	ZA1-537	142,377	142,248	0,129
41184A	144,399	144,274	0,125	ZA1-539	145,691	145,562	0,129
41184B	143,647	143,522	0,125	ZA2-500	149,846	149,718	0,128
41184C	143,907	143,782	0,125	ZA2-501	151,105	150,977	0,128
41184D	144,492	144,367	0,125	ZA2-502	152,042	151,913	0,129
41184E	140,685	140,560	0,125	ZA2-503	143,576	143,447	0,129
41201	149,434	149,310	0,124	ZA5-505	164,122	163,994	0,128
41202	148,710	148,586	0,124	ZA10-517	145,461	145,335	0,126
41203	150,328	150,204	0,124	ZA10-518	144,748	144,622	0,126
41209A	173,377	173,253	0,124	ZA10-520	145,210	145,084	0,126
41210A	175,568	175,445	0,123	ZA18-511.02	145,568	145,445	0,123
41211A	167,200	167,077	0,123	ZA18-513	145,851	145,728	0,123
41218	150,019	149,896	0,123	ZA18-513.02	145,745	145,622	0,123
41219	148,815	148,692	0,123	ZA18-530	146,536	146,412	0,124
41220A	148,977	148,854	0,123	ZA18-532	145,440	145,316	0,124
41221A	145,713	145,590	0,123	ZA18-537	144,091	143,966	0,125
41232A	152,599	152,477	0,122	ZA19-509	146,505	146,381	0,124
41233	150,345	150,223	0,122	ZA21-507	150,215	150,091	0,124
41236	158,006	157,884	0,122	ZA23-505	152,987	152,865	0,122
41253	154,565	154,444	0,121	ZA23-511	151,228	151,106	0,122
41256	152,883	152,762	0,121	ZA2B-520	150,363	150,244	0,119
41268	161,607	161,486	0,121	ZBZC-509	152,171	152,050	0,121
41269	157,207	157,086	0,121	ZBZC-539	155,144	155,023	0,121
41270	153,198	153,077	0,121	ZBZC-540	154,788	154,667	0,121
41271A	155,323	155,202	0,121	ZBZC-541	154,803	154,682	0,121
41285A	152,886	152,768	0,118	ZBZC-544	154,266	154,145	0,121
41285B	153,104	152,985	0,119	ZC7-513	161,772	161,650	0,122
41285C	150,659	150,540	0,119	ZNSBA2-507	134,568	134,443	0,125
41285D	150,786	150,667	0,119	ZNSBA11-502	135,559	135,438	0,121
41285E	151,402	151,283	0,119	4424BA-1021	128,801	128,688	0,113
41299	168,104	167,984	0,120	4424BA-1024	134,823	134,707	0,116
41300	169,601	169,481	0,120	C8-516	212,311	212,189	0,122
41301	169,972	169,852	0,120	CZA-610	167,299	167,175	0,124
41302	168,127	168,007	0,120	CZC-531	167,288	167,166	0,122



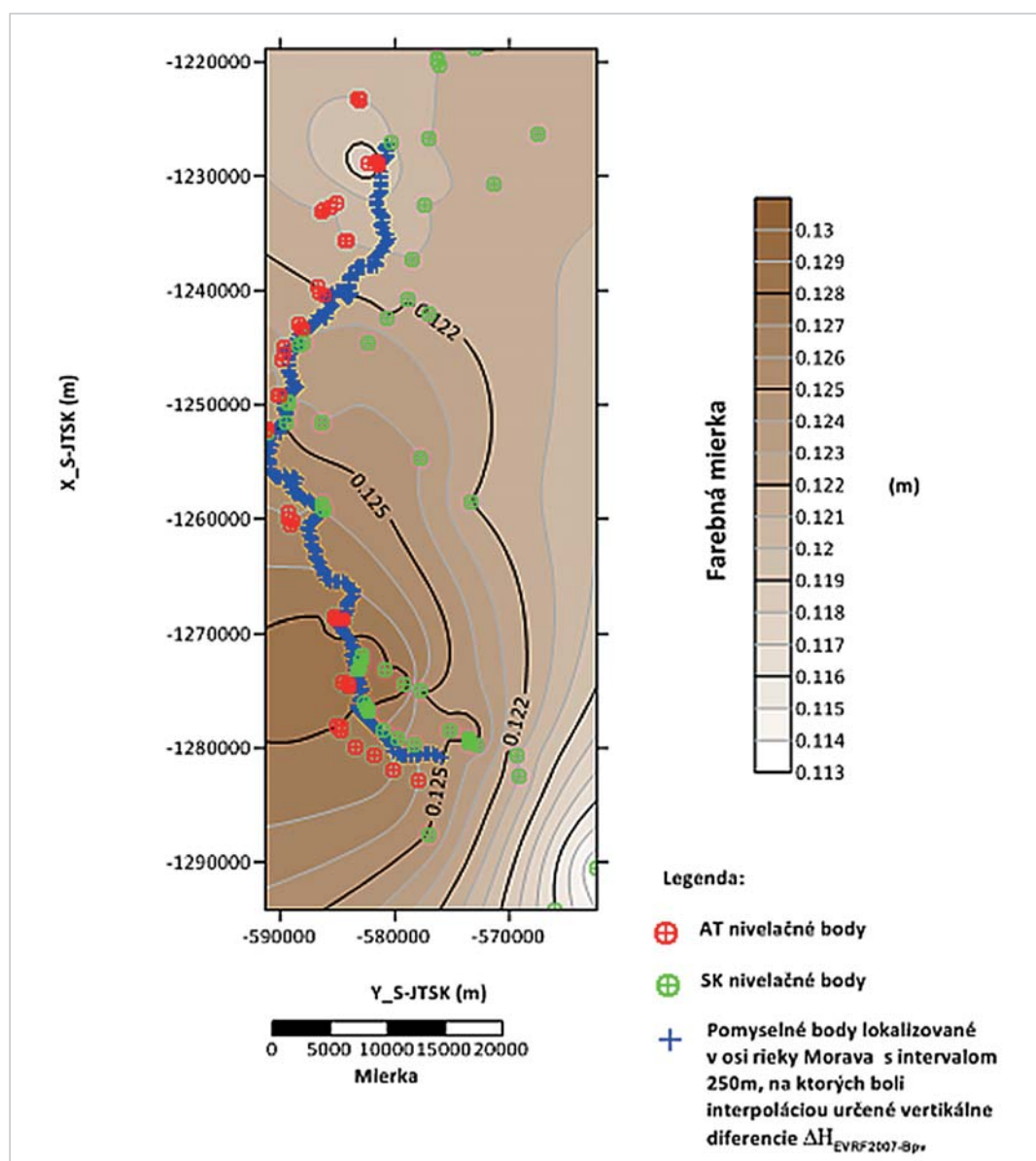


Obr. 10 Geografický rozsah modelu slovenského kvázigeoidu DMQSK2014-E, ver. 06.2014 pre výpočet normálnych výšok vo vertikálnom systéme EVRF2007 z geocentrických elipsoidických výšok GRS80

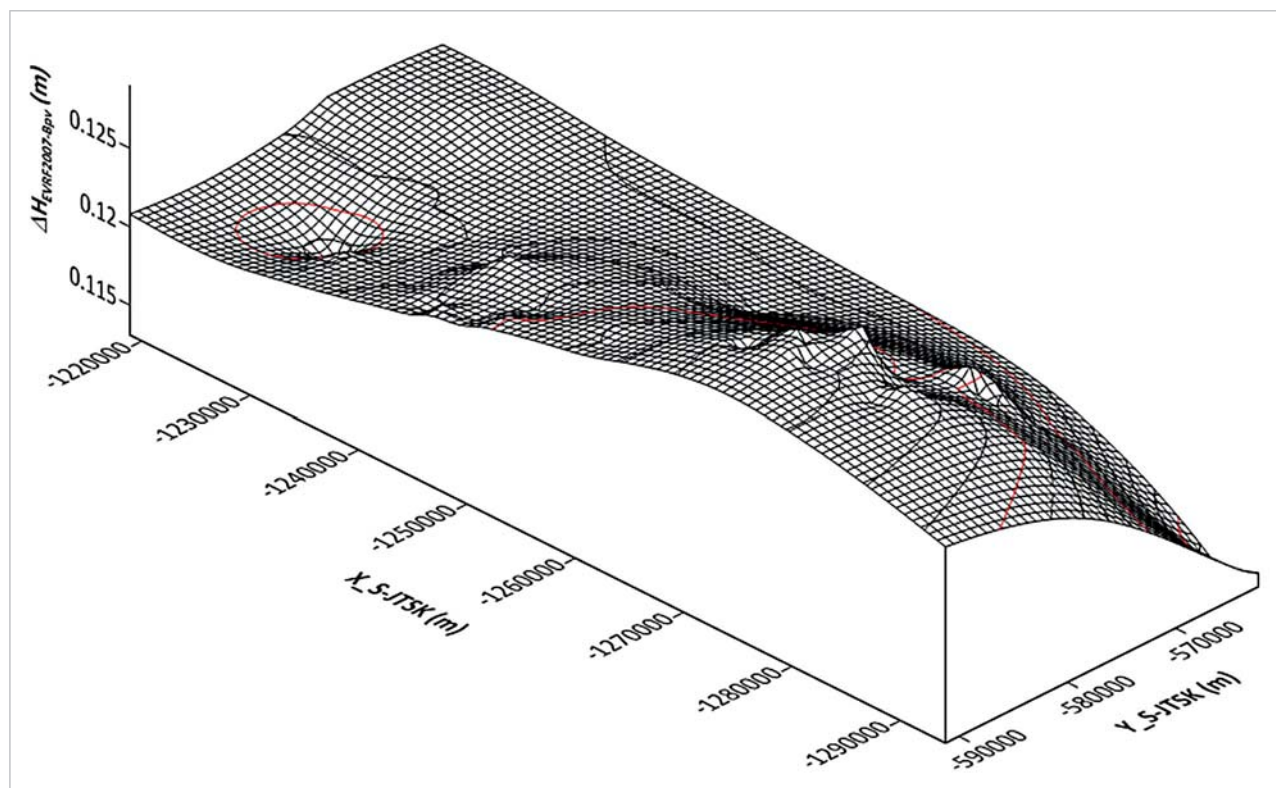
Iný spôsob grafickej ilustrácie vertikálnych diferencí  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  s využitím ortografickej projekcie je demonštrovaný na obr. 12.

Priemerná hodnota vertikálnych diferencí  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  na všetkých rakúskych a slovenských nivelačných bodoch (spolu je to množina 114 bodov) je **0,124 m**. Kladné hodnoty vertikálnych diferencí znamenajú, že východiskový nulový bod v európskom vertikálnom referenčnom systéme EVRF2007 (bod s normálnou EVRF2007 výškou  $H_{\text{EVRF2007}} = 0$  m v Amsterdame) je nižšie ako východiskový nulový bod v baltskom vertikálnom referenčnom systéme Bpv (bod s normálnou výškou  $H_{\text{Bpv}} = 0$  m v Kronštade). V tab. 10 sú uvedené reziduá na jednotlivých nivelačných bodoch, z ktorých bola vypočítaná jednotková stredná chyba  $\sigma_0 = 3$  mm a stredná chyba aritmetického priemeru vertikálnych diferencí  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$   $\sigma = 0,3$  mm.

Exaktné numerické hodnoty vertikálnych diferencí  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  na všetkých 315 bodoch polohovo lokalizovaných v osi hraničnej rieky Morava nie sú tu uvedené



Obr. 11 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  (m) medzi európskym výškovým systémom (EVRF2007, Amsterdam) a slovenským baltským výškovým systémom (Bpv, Kronštadt) na pohraničnej rieke Morava



Obr. 12 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  (m) medzi európskym výškovým systémom (EVRF2007, Amsterdam) a slovenským baltským výškovým systémom (Bpv, Kronštadt) na pohraničnej rieke Morava v ortografickej projekcii

z priestorových dôvodov, keďže tabuľka s 315 bodmi by bola priestorovo veľmi rozsiahla. Hodnoty týchto vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  sa pohybujú v intervale od 0,113 m do 0,130 m (rozptyl rozdielov je 0,027 m).

#### 6. Výpočet výškových diferencií $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$ medzi európskym vertikálnym referenčným rámcom EVRF2007 a aktuálne platným rakúskym jadranským vertikálnym systémom Adria (System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875) v osi hraničnej rieky Morava

Aj keď vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}} = H_{\text{EVRF2007}} - H_{\text{Adria}}$  (ďalej len  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$ ) medzi európskym vertikálnym referenčným rámcom EVRF2007 a aktuálne platným rakúskym vertikálnym systémom Adria nie sú z hľadiska používania vertikálnych referenčných systémov na Slovensku primárne dôležité (keďže na Slovensku je záväzný výškový referenčný systém Bpv), ich určenie v pohraničnej oblasti s Rakúskom je dôležité z hľadiska medzištátnej, resp. medzinárodnej výmeny geodetických informácií a údajov v tejto oblasti, prebiehajúcej v rámci rôznych cezhraničných projektov. Na prvý odhad týchto vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  v záujmovej lokalite je možné využiť priemernú hodnotu vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{Adria-Bpv}}$  medzi rakúskym jadranským vertikálnym systémom Adria a slovenským baltským vertikálnym systémom Bpv (0,534 m, pozri str. 190) v kombinácii s priemernou hodnotou vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Bpv}}$  medzi európskym vertikálnym referenčným systémom EVRF2007 a slovenským baltským vertikálnym referenčným systémom Bpv (0,124 m, pozri str. 194) na množine rakúskych a slovenských nivelačných

bodov. Z nich vyplýva, že priemerná hodnota vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  medzi európskym vertikálnym referenčným systémom EVRF2007 a rakúskym vertikálnym referenčným systémom Adria v záujmovej lokalite pohraničnej rieky Morava je na úrovni -0,410 m, t.j. východiskový (nulový) bod (Terst) rakúskeho jadranského systému Adria je nižší oproti nulovému bodu EVRF2007 (Amsterdam) o približne 0,410 m. To je však nutné overiť aj numerickým výpočtom.

Na numerický výpočet vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  v záujmovej lokalite bol použitý identický postup popísaný v časti 4. Využíjúc 57 rakúskych nivelačných bodov s výškami určenými v rakúskom vertikálnom systéme Adria presnou niveláciou a 52 slovenských nivelačných bodov, ktorých výšky v rakúskom vertikálnom systéme Adria boli určené s využitím modelu rakúskeho geoidu a slovenský model kvázigeoidu DMQSK2014-E, verzia 06.2014 určený na určovanie normálnych výšok vo vertikálnom referenčnom systéme EVRF2007 z geocentrických elipsoidických výšok GRS80. Tab. 11 obsahuje vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  na všetkých 109 nivelačných bodoch (57 rakúskych nivelačných bodov + 52 slovenských nivelačných bodov), ktoré predstavujú vstupy pre interpoláciu Kriging pre 315 bodov lokalizovaných v osi rieky Morava a vzdialených od seba 250 m.

Priemerná hodnota vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  na všetkých rakúskych a slovenských nivelačných bodoch (spolu je to množina 109 bodov) je -0,410 m. Záporné hodnoty vertikálnych diferencií znamenajú, že východiskový nulový bod v európskom vertikálnom referenčnom systéme EVRF2007 (bod s normálnou EVRF2007 výškou  $H_{\text{EVRF2007}} = 0$  m v Amsterdame) je vyššie ako východiskový nulový bod v jadranskom vertikálnom referenčnom systéme (bod s normálnou ortometrickou výškou  $H_{\text{Adria}} = 0$  m v Terste). V tab. 12

Tab. 10 Rezíduá vertikálnych diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov			Slovenské nivelačné body – 52 bodov		
Bod	$\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ (m)	Rezíduá (m)	Bod	$\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$ (m)	Rezíduá (m)
38840C	0,128	-0,004	3441MA-53	0,120	0,004
38840D	0,128	-0,004	3443MA-42	0,125	-0,001
38840E	0,128	-0,004	4422BA-1002	0,129	-0,005
38849	0,127	-0,003	AZR-529	0,121	0,003
38856	0,128	-0,004	C59-509	0,121	0,003
38867	0,127	-0,003	CZA-501	0,125	-0,001
38868D	0,126	-0,002	CZA-503	0,124	0,000
41074	0,128	-0,004	CZA-505	0,124	0,000
41075	0,128	-0,004	CZA-506	0,125	-0,001
41075B	0,127	-0,003	CZA-508	0,125	-0,001
41076	0,129	-0,005	CZA-509	0,126	-0,002
41095C	0,128	-0,004	CZA-520	0,125	-0,001
41096	0,128	-0,004	CZA-544	0,125	-0,001
41096A	0,127	-0,003	CZA-644	0,122	0,002
41097	0,127	-0,003	CZA-662.01	0,121	0,003
41097A	0,127	-0,003	CZA-673	0,121	0,003
41098	0,127	-0,003	ZA1-505	0,126	-0,002
41099	0,127	-0,003	ZA1-510	0,126	-0,002
41102	0,128	-0,004	ZA1-516	0,127	-0,003
41103	0,127	-0,003	ZA1-521	0,128	-0,004
41138A	0,126	-0,002	ZA1-522	0,128	-0,004
41138B	0,126	-0,002	ZA1-525	0,128	-0,004
41138C	0,126	-0,002	ZA1-526	0,128	-0,004
41138D	0,126	-0,002	ZA1-537	0,129	-0,005
41184A	0,125	-0,001	ZA1-539	0,129	-0,005
41184B	0,125	-0,001	ZA2-500	0,128	-0,004
41184C	0,125	-0,001	ZA2-501	0,128	-0,004
41184D	0,125	-0,001	ZA2-502	0,129	-0,005
41184E	0,125	-0,001	ZA2-503	0,129	-0,005
41201	0,124	0,000	ZA5-505	0,128	-0,004
41202	0,124	0,000	ZA10-517	0,126	-0,002
41203	0,124	0,000	ZA10-518	0,126	-0,002
41209A	0,124	0,000	ZA10-520	0,126	-0,002
41210A	0,123	0,001	ZA18-511.02	0,123	0,001
41211A	0,123	0,001	ZA18-513	0,123	0,001
41218	0,123	0,001	ZA18-513.02	0,123	0,001
41219	0,123	0,001	ZA18-530	0,124	0,000
41220A	0,123	0,001	ZA18-532	0,124	0,000
41221A	0,123	0,001	ZA18-537	0,125	-0,001
41232A	0,122	0,002	ZA19-509	0,124	0,000
41233	0,122	0,002	ZA21-507	0,124	0,000
41236	0,122	0,002	ZA23-505	0,122	0,002
41253	0,121	0,003	ZA23-511	0,122	0,002
41256	0,121	0,003	ZA2B-520	0,119	0,005
41268	0,121	0,003	ZBZC-509	0,121	0,003
41269	0,121	0,003	ZBZC-539	0,121	0,003
41270	0,121	0,003	ZBZC-540	0,121	0,003
41271A	0,121	0,003	ZBZC-541	0,121	0,003
41285A	0,118	0,006	ZBZC-544	0,121	0,003
41285B	0,119	0,005	ZC7-513	0,122	0,002
41285C	0,119	0,005	ZNSBA2-507	0,125	-0,001
41285D	0,119	0,005	ZNSBA11-502	0,121	0,003
41285E	0,119	0,005	4424BA-1021	0,113	0,011
41299	0,120	0,004	4424BA-1024	0,116	0,008
41300	0,120	0,004	C8-516	0,122	0,002
41301	0,120	0,004	CZA-610	0,124	0,000
41302	0,120	0,004	CZC-531	0,122	0,002



Tab. 11 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov				Slovenské nivelačné body – 52 bodov			
Bod	$H_{\text{EVRF2007}}$ (m)	$H_{\text{Adria}}$ (m)	$\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$ (m)	Bod	$H_{\text{EVRF2007}}$ (m)	$H_{\text{Adria}}$ (m)	$\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$ (m)
38840C	197,031	197,460	-0,429	3441MA-53	154,687	155,115	-0,428
38840D	223,888	224,317	-0,429	3443MA-42	148,819	149,246	-0,427
38840E	285,366	285,792	-0,426	4422BA-1002	256,850	257,278	-0,428
38849	161,186	161,604	-0,418	AZR-529	134,463	134,699	-0,236
38856	148,106	148,519	-0,413	C59-509	173,380	173,812	-0,432
38867	140,838	141,247	-0,409	CZA-501	141,648	141,983	-0,335
38868D	141,280	141,688	-0,408	CZA-503	152,885	153,235	-0,350
41074	144,271	144,704	-0,433	CZA-505	159,801	160,159	-0,358
41075	141,004	141,437	-0,433	CZA-506	162,938	163,297	-0,359
41075B	144,169	144,603	-0,434	CZA-508	166,408	166,765	-0,357
41076	143,296	143,730	-0,434	CZA-509	176,178	176,537	-0,359
41095C	147,968	148,390	-0,422	CZA-520	188,754	189,146	-0,392
41096	149,938	150,358	-0,420	CZA-544	217,933	218,347	-0,414
41096A	149,712	150,133	-0,421	CZA-644	156,004	156,399	-0,395
41097	145,499	145,920	-0,421	CZA-662.01	151,467	151,858	-0,391
41097A	143,832	144,253	-0,421	CZA-673	152,318	152,707	-0,389
41098	140,812	141,232	-0,420	ZA1-505	140,848	141,260	-0,412
41099	139,805	140,224	-0,419	ZA1-510	143,264	143,678	-0,414
41102	150,211	150,630	-0,419	ZA1-516	152,649	153,066	-0,417
41103	150,202	150,622	-0,420	ZA1-521	147,216	147,638	-0,422
41138A	144,266	144,688	-0,422	ZA1-522	157,940	158,362	-0,422
41138B	142,873	143,294	-0,421	ZA1-525	152,847	153,270	-0,423
41138C	143,249	143,672	-0,423	ZA1-526	149,569	149,994	-0,425
41138D	141,448	141,870	-0,422	ZA1-537	142,377	142,801	-0,424
41184A	144,399	144,824	-0,425	ZA1-539	145,691	146,114	-0,423
41184B	143,647	144,072	-0,425	ZA2-500	149,846	150,268	-0,422
41184C	143,907	144,333	-0,426	ZA2-501	151,105	151,525	-0,420
41184D	144,492	144,918	-0,426	ZA2-502	152,042	152,459	-0,417
41184E	140,685	141,111	-0,426	ZA2-503	143,576	143,991	-0,415
41201	149,434	149,856	-0,422	ZA5-505	164,122	164,550	-0,428
41202	148,710	149,130	-0,420	ZA10-517	145,461	145,877	-0,416
41203	150,328	150,748	-0,420	ZA10-518	144,748	145,164	-0,416
41209A	173,377	173,805	-0,428	ZA10-520	145,210	145,626	-0,416
41210A	175,568	175,994	-0,426	ZA18-511.02	145,568	145,981	-0,413
41211A	167,200	167,626	-0,426	ZA18-513	145,851	146,262	-0,411
41218	150,019	150,437	-0,418	ZA18-513.02	145,745	146,158	-0,413
41219	148,815	149,229	-0,414	ZA18-530	146,536	146,955	-0,419
41220A	148,977	149,393	-0,416	ZA18-532	145,440	145,860	-0,420
41221A	145,713	146,128	-0,415	ZA18-537	144,091	144,513	-0,422
41232A	152,599	153,014	-0,415	ZA19-509	146,505	146,893	-0,388
41233	150,345	150,755	-0,410	ZA21-507	150,215	150,594	-0,379
41236	158,006	158,419	-0,413	ZA23-505	152,987	153,357	-0,370
41253	154,565	154,971	-0,406	ZA23-511	151,228	151,626	-0,398
41256	152,883	153,288	-0,405	ZA2B-520	150,363	150,790	-0,427
41268	161,607	162,033	-0,426	ZBZC-509	152,171	152,572	-0,401
41269	157,207	157,634	-0,427	ZBZC-539	155,144	155,512	-0,368
41270	153,198	153,622	-0,424	ZBZC-540	154,788	155,153	-0,365
41271A	155,323	155,754	-0,431	ZBZC-541	154,803	155,168	-0,365
41285A	152,886	153,318	-0,432	ZBZC-544	154,266	154,630	-0,364
41285B	153,104	153,532	-0,428	ZC7-513	161,772	162,124	-0,352
41285C	150,659	151,086	-0,427	ZNSBA2-507	134,568	134,984	-0,416
41285D	150,786	151,213	-0,427	ZNSBA11-502	135,559	135,796	-0,237
41285E	151,402	151,829	-0,427	4424BA-1021*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41299	168,104	168,543	-0,439	4424BA-1024*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41300	169,601	170,040	-0,439	C8-516*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41301	169,972	170,412	-0,440	CZA-610*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný
41302	168,127	168,568	-0,441	CZC-531*	neuvažovaný	neuvažovaný	neuvažovaný

Tab. 12 Rezíduá vertikálnych diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Adria}$  na rakúskych a slovenských nivelačných bodoch

Rakúske nivelačné body – 57 bodov			Slovenské nivelačné body – 52 bodov		
Bod	$\Delta H_{EVRF2007-Adria}$ (m)	Rezíduá (m)	Bod	$\Delta H_{EVRF2007-Adria}$ (m)	Rezíduá (m)
38840C	-0,429	0,019	3441MA-53	-0,428	0,018
38840D	-0,429	0,019	3443MA-42	-0,427	0,017
38840E	-0,426	0,016	4422BA-1002	-0,428	0,018
38849	-0,418	0,008	AZR-529	-0,236	-0,174
38856	-0,413	0,003	C59-509	-0,432	0,022
38867	-0,409	-0,001	CZA-501	-0,335	-0,075
38868D	-0,408	-0,002	CZA-503	-0,350	-0,060
41074	-0,433	0,023	CZA-505	-0,358	-0,052
41075	-0,433	0,023	CZA-506	-0,359	-0,051
41075B	-0,434	0,024	CZA-508	-0,357	-0,053
41076	-0,434	0,024	CZA-509	-0,359	-0,051
41095C	-0,422	0,012	CZA-520	-0,392	-0,018
41096	-0,420	0,010	CZA-544	-0,414	0,004
41096A	-0,421	0,011	CZA-644	-0,395	-0,015
41097	-0,421	0,011	CZA-662.01	-0,391	-0,019
41097A	-0,421	0,011	CZA-673	-0,389	-0,021
41098	-0,420	0,010	ZA1-505	-0,412	0,002
41099	-0,419	0,009	ZA1-510	-0,414	0,004
41102	-0,419	0,009	ZA1-516	-0,417	0,007
41103	-0,420	0,010	ZA1-521	-0,422	0,012
41138A	-0,422	0,012	ZA1-522	-0,422	0,012
41138B	-0,421	0,011	ZA1-525	-0,423	0,013
41138C	-0,423	0,013	ZA1-526	-0,425	0,015
41138D	-0,422	0,012	ZA1-537	-0,424	0,014
41184A	-0,425	0,015	ZA1-539	-0,423	0,013
41184B	-0,425	0,015	ZA2-500	-0,422	0,012
41184C	-0,426	0,016	ZA2-501	-0,420	0,010
41184D	-0,426	0,016	ZA2-502	-0,417	0,007
41184E	-0,426	0,016	ZA2-503	-0,415	0,005
41201	-0,422	0,012	ZA5-505	-0,428	0,018
41202	-0,420	0,010	ZA10-517	-0,416	0,006
41203	-0,420	0,010	ZA10-518	-0,416	0,006
41209A	-0,428	0,018	ZA10-520	-0,416	0,006
41210A	-0,426	0,016	ZA18-511.02	-0,413	0,003
41211A	-0,426	0,016	ZA18-513	-0,411	0,001
41218	-0,418	0,008	ZA18-513.02	-0,413	0,003
41219	-0,414	0,004	ZA18-530	-0,419	0,009
41220A	-0,416	0,006	ZA18-532	-0,420	0,010
41221A	-0,415	0,005	ZA18-537	-0,422	0,012
41232A	-0,415	0,005	ZA19-509	-0,388	-0,022
41233	-0,410	0,000	ZA21-507	-0,379	-0,031
41236	-0,413	0,003	ZA23-505	-0,370	-0,040
41253	-0,406	-0,004	ZA23-511	-0,398	-0,012
41256	-0,405	-0,005	ZA2B-520	-0,427	0,017
41268	-0,426	0,016	ZBZC-509	-0,401	-0,009
41269	-0,427	0,017	ZBZC-539	-0,368	-0,042
41270	-0,424	0,014	ZBZC-540	-0,365	-0,045
41271A	-0,431	0,021	ZBZC-541	-0,365	-0,045
41285A	-0,432	0,022	ZBZC-544	-0,364	-0,046
41285B	-0,428	0,018	ZC7-513	-0,352	-0,058
41285C	-0,427	0,017	ZNSBA2-507	-0,416	0,006
41285D	-0,427	0,017	ZNSBA11-502	-0,237	-0,173
41285E	-0,427	0,017	4424BA-1021*	neuvažovaný	neuvažovaný
41299	-0,439	0,029	4424BA-1024*	neuvažovaný	neuvažovaný
41300	-0,439	0,029	C8-516*	neuvažovaný	neuvažovaný
41301	-0,440	0,030	CZA-610*	neuvažovaný	neuvažovaný
41302	-0,441	0,031	CZC-531*	neuvažovaný	neuvažovaný

sú uvedené rezíduá na jednotlivých nivelačných bodoch, z ktorých bola vypočítaná jednotková stredná chyba  $\sigma_0 = 32 \text{ mm}$  a stredná chyba aritmetického priemeru vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}} = 2 \text{ mm}$ .

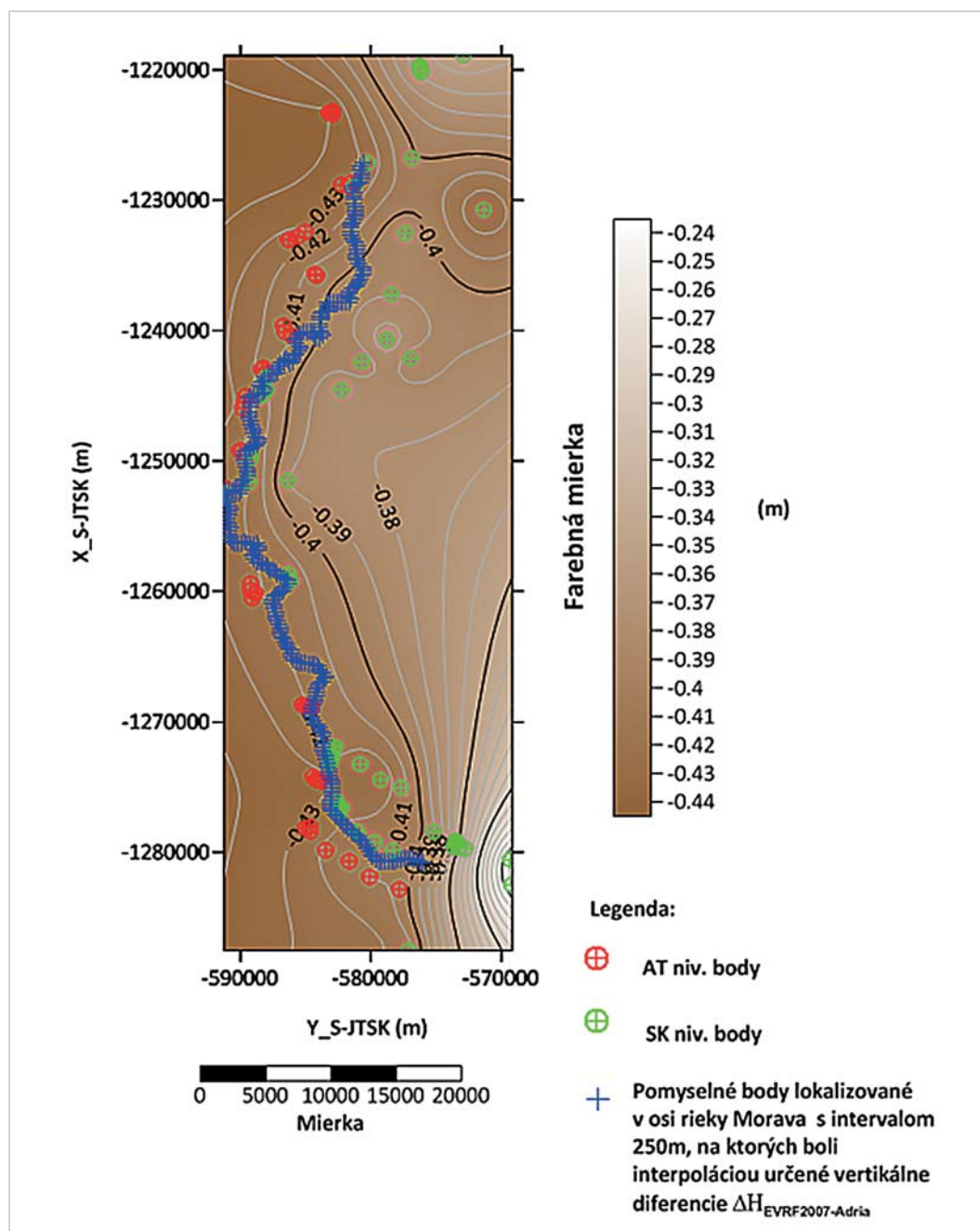
Na obr. 13 je ilustrovaný grafický priebeh vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  na všetkých 315 bodoch polohovo lokalizovaných v osi hraničnej rieky Morava.

Exaktné numerické hodnoty vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  na všetkých 315 bodoch polohovo lokalizovaných v osi hraničnej rieky Morava nie sú tu uvedené z priestorových dôvodov, keďže tabuľka s 315 bodmi by bola priestorovo veľmi rozsiahla. Hodnoty týchto vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  sa pohybujú v intervale od 0,391 m do 0,429 m (rozptyl rozdielov je 0,038 m).

Iný spôsob grafickej ilustrácie vertikálnych diferencií  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  s využitím ortografickej projekcie je demonštrovaný na obr. 14.

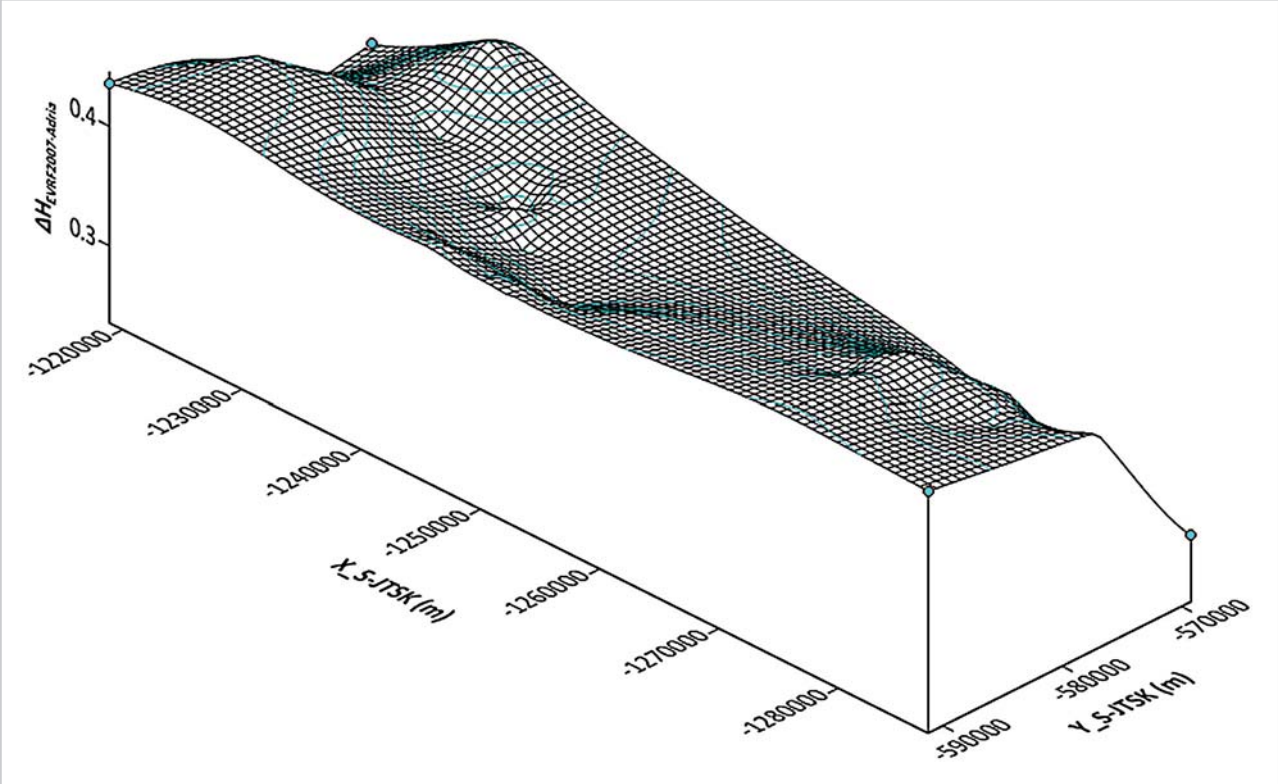
## 7. Záver

Stanovenie optimálnych vertikálnych diferencií medzi aktuálne platnými vertikálnymi referenčnými systémami vyžaduje mať k dispozícii množinu bodov s ich aktuálne platnými hodnotami nadmorských výšok. V prípade, že takáto množina bodov neexistuje, je potrebné zrealizovať merania na určenie vertikálnych diferencií v záujmovej



Obr. 13 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{\text{EVRF2007-Adria}}$  (m) medzi európskym výškovým systémom (EVRF2007, Amsterdam) a rakúskym jadranským výškovým systémom (Adria, Terst) na pohraničnej rieke Morava





Obr. 14 Vertikálne diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Adria}$  (m) medzi európskym výškovým systémom (EVRF2007, Amsterdam) a rakúskym jadranským výškovým systémom (Adria, Terst) na pohraničnej rieke Morava v ortografickej projekcii

Tab. 13 Štatistické zhodnotenie dosiahnutých výsledkov v oblasti rieky Morava (celková dĺžka úseku je približne 78 km)

Štatistické parametre hodnotenia dosiahnutých výsledkov	Vertikálne diferencie $\Delta H$ (m) medzi jednotlivými vertikálnymi systémami Bpv, Adria a EVRF2007 v oblasti pohraničnej rieky Morava		
	$\Delta H_{Adria-Bpv}$	$\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$	$\Delta H_{EVRF2007-Adria}$
Priemerná hodnota	0,534	0,124	- 0,410
Jednotková stredná chyba $\sigma_0$	0,033	0,003	0,032
Stredná chyba aritmetického priemeru $\sigma$	0,003	0,0003	0,002

oblasti. Okrem toho, na takýto výpočet je *nevyhnutné mať k dispozícii čo najpresnejšie modely (kvázi)geoidov*, ktoré by pokrývali celú záujmovú oblasť.

Štatistické zhodnotenie dosiahnutých výsledkov prezentovaných v tomto článku je uvedené v **tab. 13**. Hodnotiace parametre vyjadrujú neistoty v nivelačných meraniach a v heterogénosti použitých nivelačných bodov vo výpočtoch (napr. množina slovenských nivelačných bodov použitých vo výpočtoch obsahuje body I. a II. rádu), ako aj neistoty v určení rakúskeho geoidu, resp. slovenského kvázi-geoidu.

Odhadovaná presnosť výpočtu výškových diferencií  $\Delta H_{Adria-Bpv}$  medzi jadranským vertikálnym systémom platným v Rakúsku (*System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875*) a slovenským baltským vertikálnym systémom Bpv (Kronšadt) s využitím oboch modelov geoidu a kvázi-geoidu je na úrovni presnosti technickej nivelácie. To isté sa dá konštatovať aj pre určenie výškových diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  medzi európskym verti-

kálnym systémom EVRF2007 (Amsterdam) a slovenským baltským vertikálnym systémom Bpv (Kronšadt), kde priemerná hodnota vertikálnej diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Bpv}$  v testovanej oblasti **0,124 m** (pozri **tab. 8**) je v dobrej zhode s odhadnutou hodnotou **0,120 m** pre územie SR uvedenou v [18], ako aj pre určenie výškových diferencií  $\Delta H_{EVRF2007-Adria}$  medzi európskym vertikálnym systémom EVRF2007 (Amsterdam) a rakúskym jadranským vertikálnym systémom Adria (Terst). V tomto prípade priemerná hodnota vertikálnej diferencie  $\Delta H_{EVRF2007-Adria}$  v záujmovej lokalite je **-0,410 m** (pozri **tab. 12**) a oproti hodnote **-0,350 m**, ktorá je odhadovaná pre celé Rakúsko a ktorú uvádza [14] sa líši o **6 cm**.

Inou alternatívou by bola realizácia presných nivelačných meraní na identických nivelačných bodoch na rakúskej strane riek Morava a Dunaj s východiskovým bodom na našom nivelačnom bode I. rádu s aktuálne platnou výškou **Bpv**, čím by sa určili výšky vo vertikálnom systéme **Bpv** na príslušnej množine rakúskych nivelačných bodov v záujmovej lokalite a opačne, t.j. východiskovým bodom

by bol bod I. rádu na rakúskej strane s platnou jadranskou výškou v rakúskom vertikálnom systéme (**System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875**) a presnou niveláciou by sa určili jadranské výšky v rakúskom vertikálnom systéme na identických nivelačných bodoch na slovenskej strane riek Morava a Dunaj. Analogicky by sa postupovalo aj pri priamom meraní výšok vo vertikálnom referenčnom systéme EVRF2007 (Amsterdam) presnou niveláciou.

Tým by sa určili vertikálne diferencie z priamych nivelačných meraní metódou presnej nivelácie na takýchto identických nivelačných bodoch a tie by slúžili ako východiskové údaje na interpolovanie akýchkoľvek ďalších vertikálnych diferencií metódou Kriging v záujmovej lokalite (v hraničných oblastiach riek Moravy a Dunaja) pre akýkoľvek zvolený bod, pre ktorý by vznikla požiadavka určiť nadmorskú výšku vo všetkých troch vertikálnych systémoch (**Bpv, EVRF2007 a System der Normalorthometrischen Höhen mit Pegel Adria Triest 1875**).

Tento spôsob určovania vertikálnych diferencií na identickej množine nivelačných bodov z výšok určených presnou niveláciou vo všetkých vertikálnych systémoch prichádzajúcich do úvahy, by garantoval najvyššiu možnú presnosť na milimetrovej úrovni. Jeho hlavnou nevýhodou je však jeho časová a finančná náročnosť. Napriek tomu si treba uvedomiť, že kvalitné výškové modely terénu sú nevyhnutným predpokladom na spoľahlivé riešenie problémov vplyvu variácie vodných hmôt na okolité územie a jeho infraštruktúru. Preto by bolo vhodné a ekonomicky prospešné overiť dosiahnuté výsledky praktickým meraním v teréne, ktorých ďalším dôležitým a vítaným dôsledkom by bolo podstatné zjednodušenie a zprehľadnenie výmeny geodetických údajov a eliminácia možných zdrojov chýb, plynúca z výmeny heterogénnych geodetických údajov v rámci rôznych medzinárodných cezhraničných projektov.

Každé spresnenie nivelačných a gravimetrických meraní prináša zlepšenie v celkovej realizácii vertikálneho referenčného systému [19] a najmä vedie k spresneniu určenia vertikálnych rozdielov medzi rôznymi vertikálnymi referenčnými systémami, čo významne prispieva k hodnoteniu dynamiky zemského povrchu.

V roku 2015 skupina autorov [20] konštatovala, že v priebehu nasledujúcich štyroch rokov bude založená komisia v rámci IAG, ktorá bude skúmať možnosti nahradenia aktuálne platného Globálneho Referenčného Systému 1980 (GRS80) novým Geodetickým Referenčným Systémom (GRS). Táto skupina pripravovala návrh úplne nových parametrov pre nový GRS a prezentovala ich na Plenárnom zasadnutí IUGG v Montreali, Kanada v dňoch 8. – 18. 7. 2019.

#### Podakovanie:

Autori článku ďakujú Geodetickému a kartografickému ústavu v Bratislave a rakúskemu Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen vo Viedni za poskytnutie najaktuálnejších geodetických údajov o nivelačných bodoch pozdĺž rakúsko – slovenskej hranice v záujmovej lokalite rieky Morava a Dunaj. Autori článku zároveň ďakujú lektorovi článku za cenné pripomienky k textu.

- [2] IHDE, J.-AUGATH, W.: The Vertical Reference System for Europe. In: Veröff. Bayer Komm. Int.Erdmess. Bayer Akad. d. Wiss., Astron-geod. Arb., München 2000, H. 61, p. 99-110.
- [3] JEKEL, Ch.: Geometric Reference Systems in Geodesy. Division of geodesy and Geospatial Science, School of Earth Sciences, Ohio State University, July 2006.
- [4] VYKUTIL, J.: Vyšší geodézie, Díl II. Ediční středisko VUT Brno, 1978.
- [5] BÖHM, J.-HORA, L.-KOLENATÝ, E.: Vyšší geodézie, díl 2, Ediční středisko ČVUT, Praha 1, 1981.
- [6] NEREM, R. S.-CHAMBERS, D.-CHOE, C.-MITCHUM, G. T.: Estimating Mean Sea Level Change from the TOPEX and Jason Altimeter Missions. Mar. Geod., (2010), 33, p. 435-446.
- [7] KAKKURI, J.: Recent vertical crustal movement (Atlas map 6). In A Continent Revealed: the European Geotraverse. Atlas of Compiled Data, Freeman, R. and Mueller, S., eds., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [8] VANKO, J.: Vertikálne pohyby zemského povrchu v oblasti výstavby dunajských vodných diel. In 2. geodetický seminár „SVD Gabčíkovo-Nagymaros“. Hydrotav OZ Gabčíkovo, Bratislava 1982.
- [9] ŘEZNÍČEK, J.: Rozbor výsledků předbežného vyrovnání nivelační sítě UELN 2 000 v korelaci s geomorfologickým členením ČR. Geodetický a kartografický obzor, 47/89, 2001, č. 3, s. 57-62.
- [10] BENEŠ, F.: Současný stav výškových geodetických základů. Geodetický a kartografický obzor, 45/87, 1999, č. 6, s. 113-117.
- [11] IHDE, J.-MÄKINEN, J.-SACHER, M.: Conventions for the Definition and Realization of an European Vertical Reference System (EVRS). IAG SC 1.3 a EUREF, 2008.
- [12] SACHER, M.-LIEBSCH, G.: Short description of the European vertical reference system and its realizations. EUREF Symposium 2015, June 03-05, Leipzig, Germany.
- [13] PICK, M.: Výšky, nivelace, hladinové a vztažné plochy. Zborník referátov „Súčasný stav a perspektívy rozvoja geodézie a využívanie výsledkov vedy a výskumu v geodetickej praxi“. Bardejovské Kúpele, 3. 9. 1987.
- [14] KRUIS, B.: Srovnávací studium nivelačních horizontů ČSR a okolních států. Geodetický a kartografický sborník, 1957.
- [15] SAV – mapa úplných Bouguerových gravitačních anomálií.
- [16] MILÍČKA, J.: Uhlíkovodíkový potenciál Podunajskej panvy. Univerzita Komenského, Přírodovědecká fakulta, 2017.
- [17] MOJZEŠ, M.-KALAFUT, M.: Technická správa – Diferencie medzi Jadranským vertikálnym referenčným systémom realizovaným ČSJS (česko-slovenská jednotná nivelačná sieť) – Jadran<sub>CSJS</sub> a Baltským vertikálnym referenčným systémom realizovaným vertikálnou referenčnou sieťou Bpv (Balt po vyrovnání). Bratislava, Máj 2018.
- [18] SACHER, M.-IHDE, J.-SEEGER, H.: Preliminary Transformation Relations between National European Height Systems and UELN. Oslo, CERCO – Plenary 1998. 19 s.
- [19] LIEBSCH, G.-RÜLKE, A.-SACHER, M.-IHDE, J.: Definition and Realization of the EVRS: How do we want to proceed?, Presented at EUREF Symposium 2014, June 04-06, Vilnius, Lithuania.
- [20] IHDE, J.-BARZAGHI, R.-MARTI, U.-SÁNCHEZ, L.-SIDERIS, M.-DREWES, H.-FOERSTE, Ch.-GRUBER, T.-LIEBSCH, G.-PAIL, R.: Report of the Ad-hoc Group on an International Height Reference System (IHRs); In: IAG Reports 2011-2015 Travaux de l'AIG Vol. 39.

Do redakcie došlo: 20. 2. 2019

**Lektoroval:**  
**Ing. František Beneš, CSC.,**  
**Zeměměřický úřad**

#### LITERATÚRA:

- [1] DREWES, H.: Reference Systems, Reference Frames, and Geodetic Datum – Basic Considerations. In: Observing our Changing Earth. IAG Symposia 133, Springer – Verlag Berlin, Heidelberg 2009.