

Analýza určování astronomických souřadnic cirkumzenitálem**Bc. Jakub Šimek,
Fakulta stavební, ČVUT v Praze,
doc. Ing. Jakub Kostelecký, Ph.D.,
VÚGTK, v. v. i., Geodetická observatoř Pecný***Abstrakt*

Na základě zpracování měření astronomických souřadnic Gaussovou metodou stejných výšek pomocí cirkumzenitálu na Geodetické observatoři Pecný Výzkumného ústavu geodetického, topografického a kartografického v letech 1970 až 2003 byly určeny nové konvenční astronomické souřadnice. Při zpracování byly zohledněny osobní chyby jednotlivých pozorovatelů a systematické chyby přístrojů, které byly určovány vzhledem k referenčnímu přístroji s maximálním počtem měření. Ukázalo se, že přesnost určení astronomické šířky je 2,5x lepší než přesnost určení astronomické délky. Osobní chyby pozorovatelů a systematické chyby přístrojů jsou také horší v astronomické délce, než v astronomické šířce, kde jsou systematické chyby přístrojů prakticky nevýznamné.

Analysis of Determining Astronomical Coordinates by Circumzenithal*Abstract*

New conventional astronomical coordinates were determined on the basis of the measurement of astronomical coordinates by the Gaussian method of equal altitudes using the circumzenithal at the Geodetic Observatory Pecný of the Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography in the years 1970 to 2003. Within processing the personal errors of individual observers were taken into account as well as systematic errors of the instruments, which were determined with respect to the reference instrument with the maximum number of measurements. It turned out that the accuracy of determining the astronomical latitude is 2.5x better than the accuracy of determining the astronomical longitude. The personal errors of observers and the systematic errors of instruments are also worse in astronomical longitude than in astronomical latitude, where the systematic errors of instruments are practically insignificant.

Keywords: geodetic astronomy, astronomical measurements, Geodetic Observatory Pecný

1. Úvod

Určování astronomických souřadnic metodami geodetické astronomie sloužilo po celý novověk k umístění trigonometrické sítě na referenčním elipsoidu. Od začátku 20. století sloužilo k určování některých parametrů orientace Země – zejména polohy rotační osy a variací v rotačním čase. Od 90. let 20. století převzaly štafetu v určování parametrů orientace Země přesnější metody kosmické geodézie a určování astronomických souřadnic dnes slouží jen pro určení tížnicových odchylek.

Na Geodetické observatoři Pecný (GO, www.pecny.cz) Výzkumného ústavu geodetického, topografického a kartografického, v. v. i. (VÚGTK) bylo metodami geodetické astronomie pozorováno od založení observatoře v roce 1957. Zpočátku byla určována variace šířky metodou Horrebaw-Talcotovou a korekce času metodou průchodu hvězd poledníkem či prvním vertikálem pomocí měření s pasážníky. Od roku 1960 byla variace šířky určována z měření zenitteleskopem. Pro současné určování variací šířky a korekce času Gaussovou metodou stejných výšek byl na GO používán cirkumzenitál – model pp. Nušla a Friče z roku 1922 [1] s mikrometrem Baueršimý a Šuráně [2] a v roce 1967 byl v dílnách VÚGTK vyvinut první cirkumzenitál VÚGTK, model 100/1000 mm [3], který byl používán od roku 1970. Od roku 1990 již nebyla měření cirkumzenitálem používána pro určení parametrů orientace Země, ale pokračoval program určování poloh optických protějšků radiových hvězd [4], a to až do roku 2003.

V článku se budeme zabývat analýzou časových řad z pozorování astronomické šířky a délky provedených cirkumzenitálem na GO v letech 1970 až 2003.

2. Gaussova metoda stejných výšek

Gaussova metoda stejných výšek spočívá v současném určení astronomické šířky a astronomické délky a pomocné veličiny – zenitového úhlu almukantarátu (vedlejší kružnice na obloze, která má konstantní zenitový úhel), a to měřením času průchodu minimálně tří hvězd almukantarátem, přičemž souřadnice hvězd (jejich rektascenze α a deklinace δ_i) jsou známy – viz **obr. 1**.

Řešení úlohy vychází z nautického trojúhelníka na jednotkové kouli, který je tvořen pólem P_0 (průsečíkem rovnoběžky rotační osy s jednotkovou koulí), zenitem Z a hvězdou H_i . V tomto trojúhelníku můžeme pro neznámý zenitový úhel z psát sférickou kosinovou větu (při uvážení, že mezi pólem P_0 a zenitem Z je úhel $90^\circ - \varphi$, kde φ je astronomická šířka):

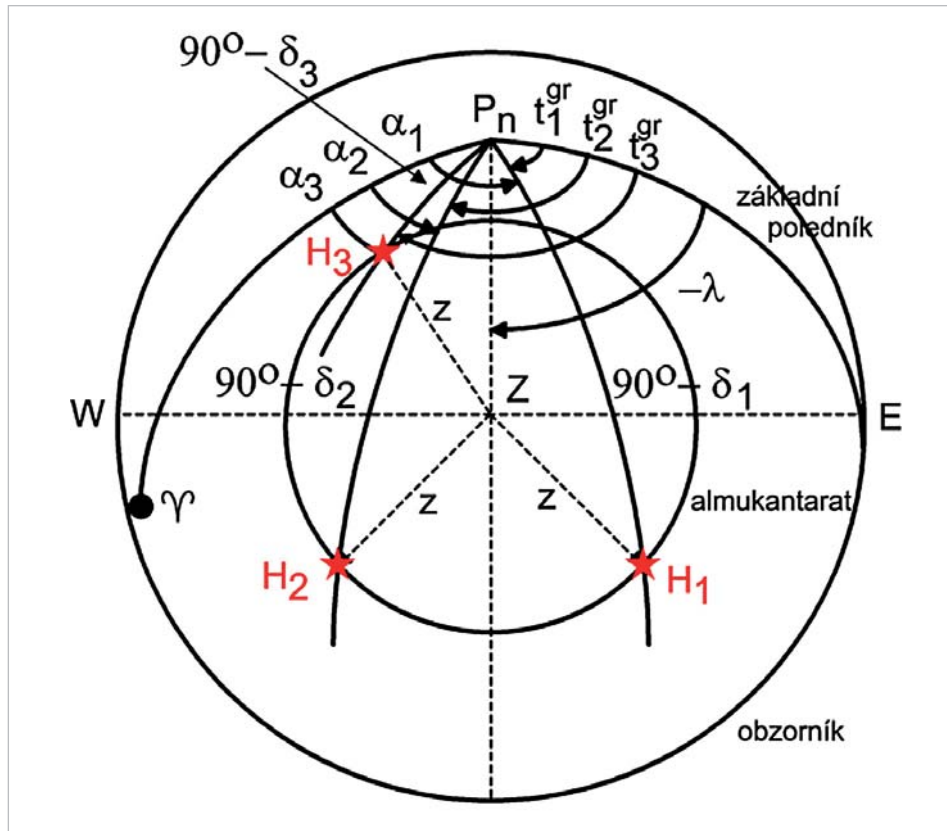
$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta_i) + \\ &+ \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta_i) \cos t_i = \\ &= \sin \varphi \sin \delta_i + \cos \varphi \cos \delta_i \cos t_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Protože rozdíl místního hvězdného času s a světového (Greenwichského) hvězdného času S je astronomická délka místa pozorování λ tj.:

$$s - S = \lambda \quad (2)$$

a hodinový úhel hvězdy t_i je rozdíl místního hvězdného času s a rektascenze hvězdy α_i tj.:

$$t_i = s - \alpha_i \quad (3)$$



Obr. 1 Gaussova metoda stejných výšek

Ize psát spojení (2) a (3):

$$t = S - a + \lambda, \quad (4)$$

kde světový hvězdný čas v okamžiku pozorování je:

$$S - S_0 = (UTC + DUT1) \cdot (1 + \mu). \quad (5)$$

UTC je světový koordinovaný čas okamžiku pozorování, S_0 je světový hvězdný čas o světové půlnoci, μ je převodní koeficient mezi hvězdným a slunečním časem a DUT1 je korekce času UTC na rotační čas UT1, což je jeden z parametrů orientace Země a je zveřejňován Mezinárodní službou rotace Země a referenčních systémů IERS [5].

Po dosažení (4) do (1) získáme:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_i + \cos \varphi \cos \delta_i \cos(S_i - a_i + \lambda) = f(\varphi, \delta_i, S_i, a_i, \lambda) \quad (6)$$

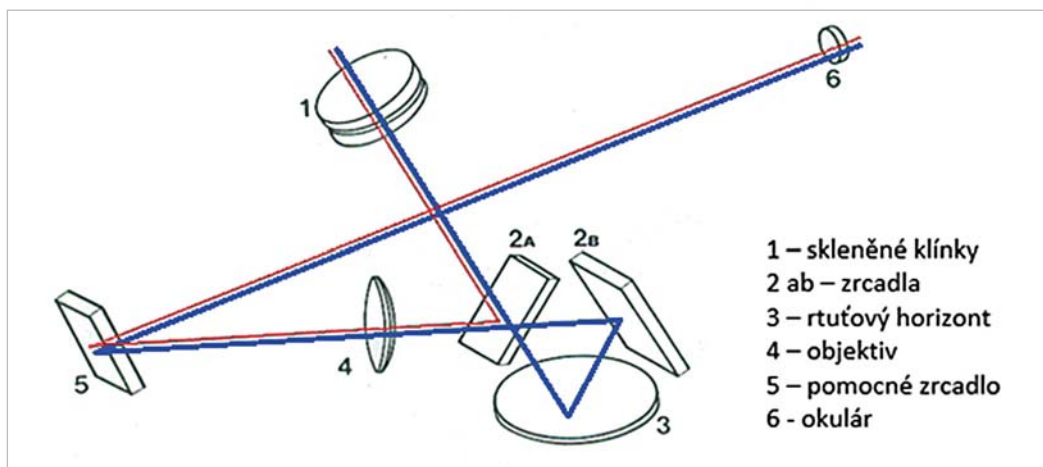
tj. zenitový úhel almukantarátu je funkcí astronomické šířky a délky místa pozorování, hvězdného času v okamžiku pozorování a souřadnic hvězdy – rektascenze a_i , a deklinace δ_i . Pro tři hvězdy získáme tři rovnice (6), které mají shodnou levou stranu. Pokud je vzájemně odečteme, získáme dvě rovnice pro dvě neznámé: astronomickou šířku φ a astronomickou délku λ .

Pro zvýšení přesnosti výsledku se nepozoruje průchod pouze tří hvězd, ale několika desítek hvězd a výsledek se získává z vyrovnání metodou nejmenších čtverců, kdy vedle neznámé astronomické šířky φ a astronomické délky λ se určuje též zenitový úhel z a případně další veličiny.

3. Cirkumzenitál

Praktická realizace Gaussovy metody stejných výšek při požadavku maximální přesnosti naráží na zásadní překážku realizace konstantního zenitového úhlu a přesného urovnání přístroje po celou dobu pozorování.

Počátky realizace přístroje (detailně např. [6]), který by zajistil pozorování hvězd procházejících almukantarátem, lze připsat švýcarskému astronomovi Beckovi, který první ideu nadirinstrumentu publikoval v roce 1887 [7]. Další variantou byl hranolový astroláb francouzského astronoma Claude [8], kde se obraz hvězd láme v hranolu a pro definici místní tížnice (a urovnání přístroje) je použit rtuťový horizont. Další z úspěšných realizací, která využívá podobných stavebních prvků jako Beckův nadirinstrument a Claude-Driencourtův hranolový astroláb, je přístroj cirkumzenitál. První model zkonstruoval astronom František Nušl s konstruktérem Josefem Janem Fričem na hvězdárně v Ondřejově v roce 1899 [9]. Další modely byly vylepšeními, poslední Fričův model z roku 1922 má jako základ dvojici stříškovitě uložených zrcátek nad rtuťovým horizontem [1]. Za účelem zvýšení přesnosti bylo realizováno několik odečtů času průchodu hvězdy almukantarátem (či jejího obrazu odkloněnému o známý úhel). V prvních přístrojích prof. Nušla byla do optické osy vložena dvojice klínek, která způsobila zdvojení či ztrojení obrazu hvězdy a registrovány byly časy průchodu jednotlivých obrazů, či jejich symetrického uspořádání. Další vývoj vždy vycházel z původní myšlenky dvojice zrcadel a spočíval v konstrukci vhodného mikrometru zajišťujícího proměnné odklání obrazu hvězdy a registraci času při definovaných úhlech odklonu. Jedním z prvních realizovaných mikrometrů byl



Obr. 2 Schématický řez cirkumzenitálem

mikrometr prof. Buchara na Českém vysokém učení technickém v Praze [10], který dále zdokonalili (zejména odstranili mrtvé chody v mechanickém systému) Baueršima, Šuráň a Krump [2]. V roce 1967 byl vyvinut první cirkumzenitál ve VÚGTK – model 100/1000 mm [3]. Vývoj cirkumzenitálů ve VÚGTK pak pokračoval do 80. let 20. století.

Cirkumzenitál se skládá z dvojice zrcadel 2a a 2b střechovitě umístěných nad rtuťovým horizontem 3, lomeného dalekohledu (objektiv 4, zrcadlo 5 a okulár 6) a mikrometru 1, který se skládá z dvojice plochých klínů s kontakty.

Princip spočívá v rozdělení světla z jedné hvězdy na dva obrazy: jeden obraz tzv. „přímý“ (červený na obr. 2) vzniká po odrazu od zrcadla 2a, druhý obraz tzv. „převrácený“ (modrý na obr. 2) vzniká po odrazu od rtuťového horizontu 3 a zrcadla 2b. Díky využití rtuťového horizontu pro jeden odraz je přístroj vždy urovnán a zenitový úhel je definován od místní tečny k tížnici. Zrcadla jsou vzájemně horizontálně posunuta. Lze odvodit, že oba obrazy se setkají, pokud je hvězda v zenitovém úhlu, který odpovídá $90^\circ - \alpha$, kde α je úhel, který zrcadla svírají. Čas, který zaznamenáme, když se oba obrazy setkají, odpovídá času průchodu hvězdy almukantarátem o zenitovém úhlu $90^\circ - \alpha$. Pro zvýšení přesnosti je v přístroji mikrometr, jehož dvojice klínů, která se otáčejí kolem optické osy, umožňuje odklon paprsku hvězdy od přímého směru o $\pm 150''$ a tak zvýšení počtu zaznamenaných časů z jednoho na 20.

Jedna řada měření, ze které byla získána astronomická šířka a délka, spočívala ve změření 25-30 hvězd během cca 1,5 hodiny. Hvězdy byly rozloženy pokud možno rovnoměrně po almukantarátu, protože hvězdy procházející východní a západní částí se podílejí zejména na určení času tj. astronomické délky a hvězdy procházející severní a jižní částí almukantarátu se podílejí zejména na určení astronomické šířky. Čas byl odečítán vůči staničním hodinám s přesností 1 milisekundy, ale přesnost vedení hvězdy observátorem byla horší až o řád. Při měření se také zaznamenávala teplota a atmosférický tlak pro zavedení oprav z refrakce vzduchu. Zpracování spočívalo ve výpočtu zdánlivých poloh pozorovaných hvězd, v rámci kterého byly k pozicím hvězd v katalogu připočteny vlastní pohyb hvězd, vliv roční a denní paralaxy, roční a denní aberace a astronomické refrakce, a dále ve vyrovnání, v rámci kterého byly určovanými neznámými astronomická šířka, korekce času (astronomická délka) a úhel zrcadel, u kterého se v prvních letech předpokládala lineární změna v čase během měření (tj. byl určován konstantní a lineární člen). V pozdějších letech byla mís-

to lineárního členu určována teplotní závislost přístroje (tj. koeficient související s teplotou přístroje při měření).

4. Měřená data a jejich příprava

V popisované analýze se zaměříme na měření provedená na GO cirkumzenitálem model VÚGTK 100/1000 mm s motorickým pohonem mikrometru v letech 1970 až 2003 (obr. 3). Jako vstupní data byly použity výsledky jednotlivých měřených řad, jejichž zdrojem byly dva provozní deníky. Data bylo nutno v prvním kroku digitalizovat. U každé řady byly získány:

- epocha měření (datum, modifikované juliánské datum),
- kód pozorovatele,
- určený zenitový úhel a jeho směrodatná odchylka,
- korekce času a jeho směrodatná odchylka,
- astronomická šířka a její směrodatná odchylka,
- směrodatná odchylka jednotková (střední chyba výšky jedné hvězdy z vyrovnání),
- průměrná teplota vzduchu,
- atmosférický tlak,
- vyrovnaný teplotní koeficient se směrodatnou odchylkou (nebo lineární člen zenitového úhlu),
- pořadové číslo řady,
- počet měřených hvězd v řadě.

Celkem bylo v období let 1970 až 2003 změřeno 2 423 řad. Výsledné astronomické souřadnice, uvedené v denících, jsou vztaženy k okamžité rotační ose. Pro další zpracování bylo nutno zavést vliv parametrů orientace Země – zejména pohybu pólu vyjádřeném souřadnicemi rotační osy x_p a y_p vůči konvenčnímu pólu CIO a variaci v rotačním čase DUT1. Příslušné vztahy jsou – dle [11]:

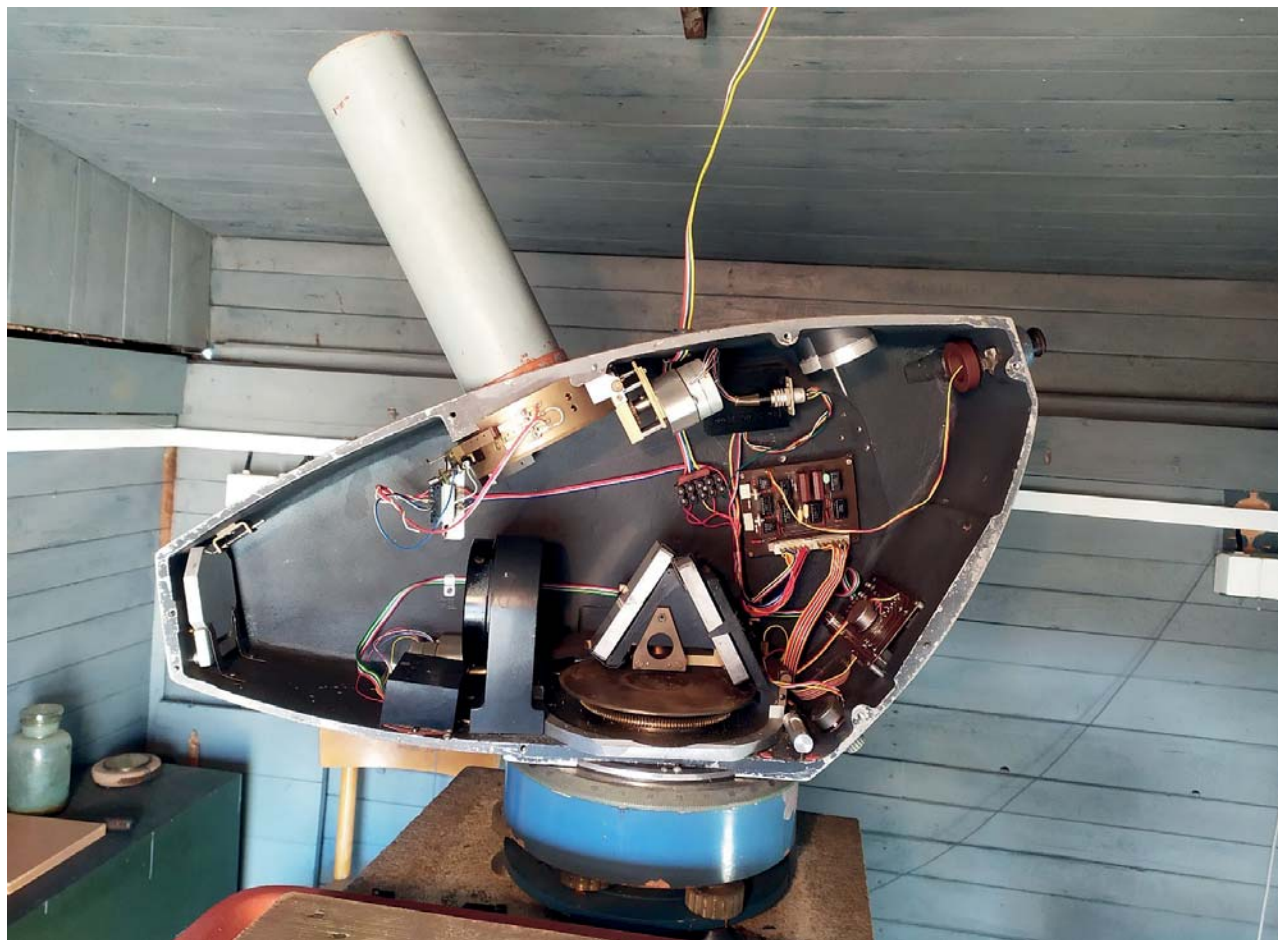
$$\Delta\varphi = -x_p \cos\lambda + y_p \sin\lambda \quad (7)$$

$$\Delta\lambda = -(x_p \sin\lambda + y_p \cos\lambda) \tan\varphi, \quad (8)$$

kde φ je šířka a λ délka stanice. Opravené astronomické souřadnice získáme:

$$\varphi_{\text{vys}} = \varphi + \Delta\varphi \quad \lambda_{\text{vys}} = \lambda - \text{DUT1} * \mu + \Delta\lambda, \quad (9)$$

kde μ je převodní koeficient mezi hvězdným a slunečním časem.



Obr. 3 Cirkumzenitál na GO – pohled na vnitřní uspořádání včetně dvojice zrcadel

Souřadnice pólu x_p a y_p a variace v rotačním čase DUT1 byly převzaty z Bulletinů Mezinárodní služby rotace Země a referenčních systémů (IERS) [5].

Zpracování dat je detailně – včetně všech provedených statistických testů – popsáno v práci [12]. Z testů datového souboru vyplynula potřeba filtrace dat před jejich zpracováním za účelem nalezení a odstranění hrubých chyb a omylů. Pro filtraci byl zvolen jednoduchý test oprav. Ze souboru měření se určí maximální oprava ze vztahu:

$$v_{max} = t_a \cdot \sigma, \quad (10)$$

kde σ je směrodatná odchylka a t_a je koeficient spolehlivosti, který jsme zvolili 3. Každé měření, jehož oprava od průměru byla větší než v_{max} , jsme označili jako chybné. Tímto způsobem jsme odstranili 3 řady pro astronomickou zeměpisnou délku a 15 řad pro astronomickou zeměpisnou šířku. Do následného vyrovnání jsme brali v úvahu pouze řady, jejichž měření mají opravu měření menší, než maximální pro délku i šířku zároveň. Měření, u nichž se nedochovala jednotková střední chyba, také nevstupují do vyrovnání. Pro výpočet jsme nakonec použili 2 396 řad z 2 423 možných.

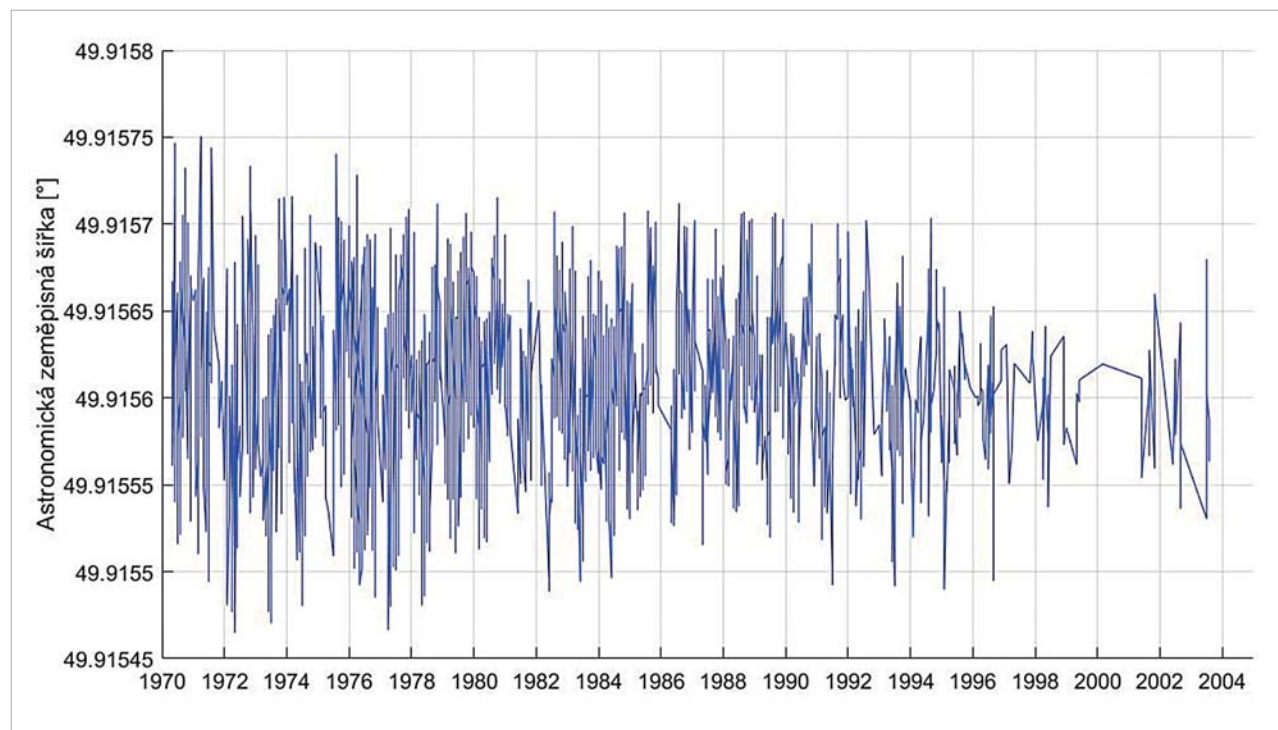
Časové řady astronomické zeměpisné šířky a astronomické zeměpisné délky jsou na obr. 4, resp. obr. 5. Zatímco časová řada šířky odpovídá předpokladu (data se šumem bez lineárního trendu), v případě časové řady délky je patrný lineární trend, který budeme dále uvažovat při zpracování. Vysvětlení tohoto jevu není snadné. Je možné,

že se jedná o změnu mikroklimatických podmínek v okolí stanoviště cirkumzenitálu způsobených postupně se měnící refrakcí vlivem růstu stromů. Protože západní svah kopce Pecný, na kterém je stanoviště cirkumzenitálu umístěno, je pozvolnější, než strmé svahy v ostatních směrech, je možné, že vliv nesymetrického mikroklimatu postupně rostoucího lesního porostu se projevil v deformaci zdánlivého almukantarátu [13] a v důsledku toho pouze v astronomické délce, a nikoliv již v astronomické šířce. Toto vysvětlení však nelze podložit daty bez hlubší analýzy výsledků měření jednotlivých hvězd v různých azimutech (k čemuž – bohužel – nejsou dostupná data).

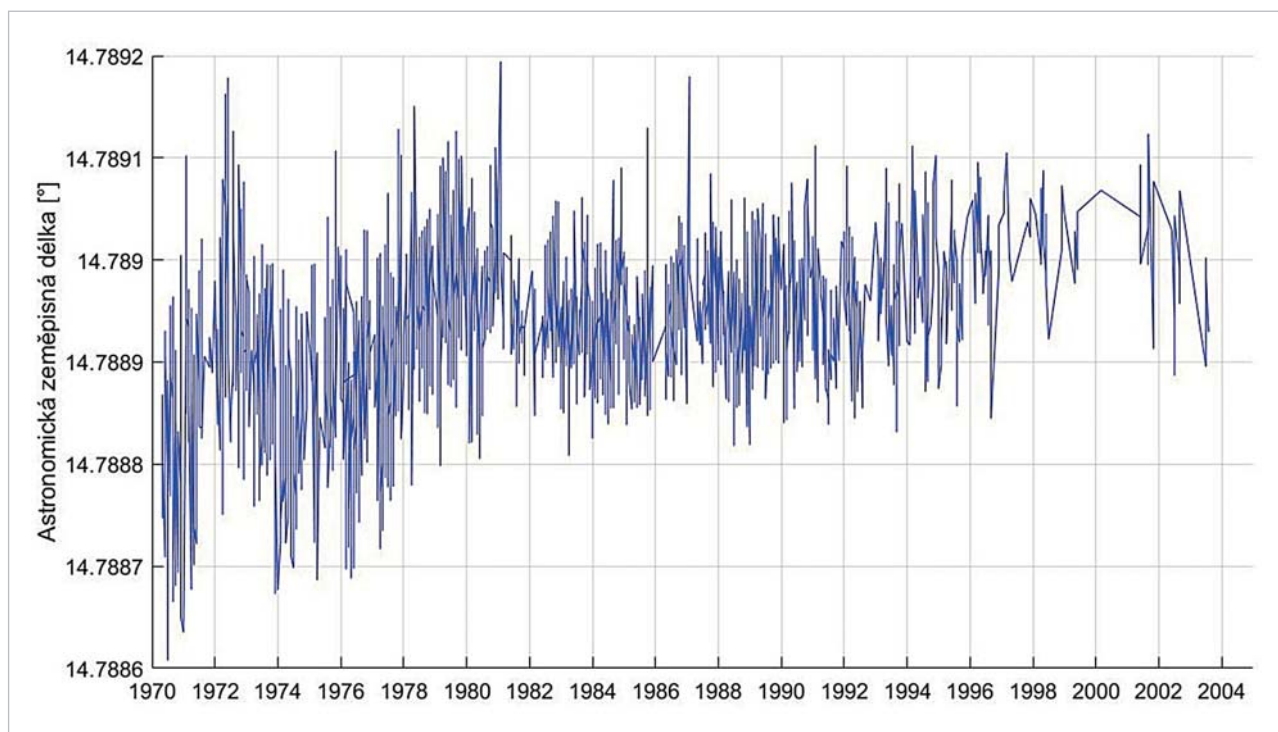
5. Analýza časových řad astronomických souřadnic

Na provedených měřeních se podílelo 11 pozorovatelů. Jejich přehled spolu s počtem změřených řad a průměrem jednotkových směrodatných odchylek je uveden v tab. 1. U všech měření v geodetické astronomii se předpokládá, že každý pozorovatel má svou osobní chybu (viz např. [14]).

Z průměrných jednotkových směrodatných odchylek je možno vzájemně posoudit jednotlivé pozorovatele z hlediska jejich přesnosti měření (obr. 6). Nejvyšší přesnosti dosáhl pozorovatel Jan Kostecký, vysoké přesnosti dosáhli také pozorovatelé Pavel Novák I. a Václav Skoupý. Nejhorší přesnosti dosáhli Jan Vaingát a Petr Holota – první jmenovaný má ale třetí nejmenší počet změřených řad.



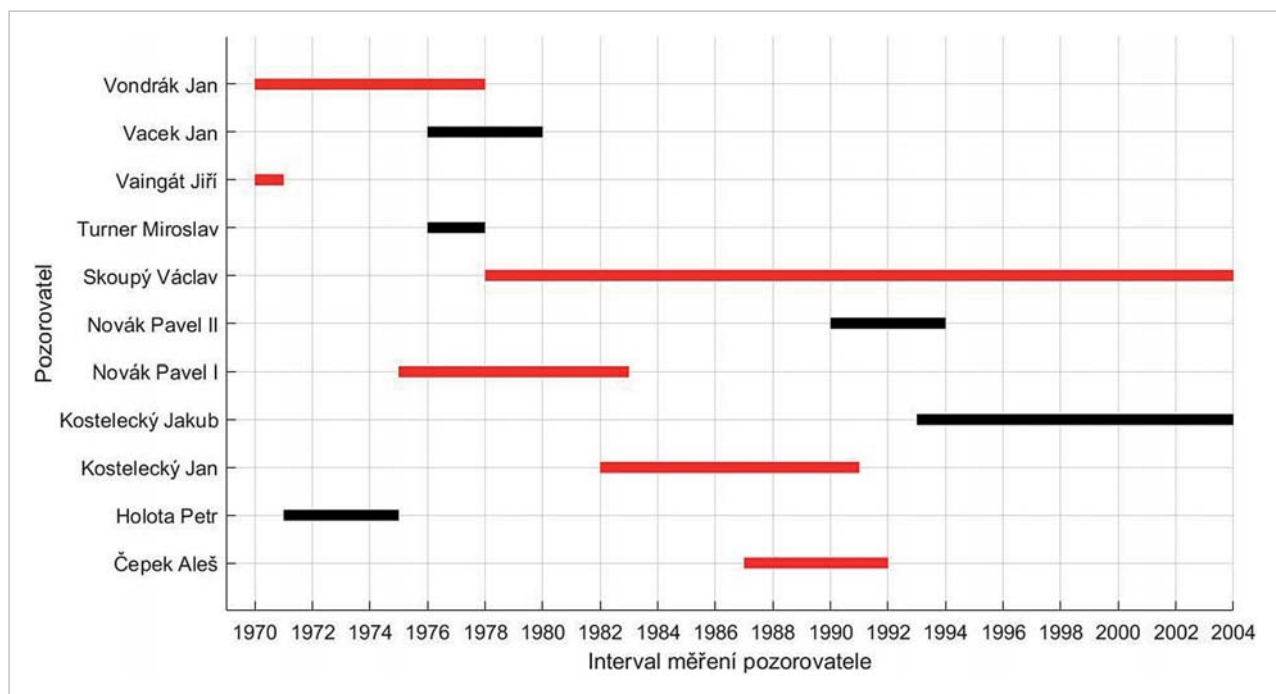
Obr. 4 Časová řada astronomické zeměpisné šířky



Obr. 5 Časová řada astronomické zeměpisné délky

Podle skokových změn v určeném zenitovém úhlu bylo konstatováno, že v měřených datech jsou různé exempláře přístroje (na GO se zkoušely všechny cirkumzenitály vyrobené v dílnách VÚGTK před jejich odesláním konečnému uživateli) nebo byl proveden zásah do konstrukce zrcadel v cirkumzenitálu. Z toho důvodu jsme podle zenitového

úhlu identifikovali 10 různých přístrojů (resp. různého sestavení zrcadel v jednom přístroji) – viz **tab. 2**. Podle [6] se v případě zenitových úhlů $29^{\circ}45/46/49/50/51'$ jedná o stejný exemplář přístroje po několika úpravách zrcadel. Dále předpokládáme, že každý přístroj, resp. sestavení zrcadel může mít svoji konstrukční systematickou chybu (**obr. 7**).



Obr. 6 Znárodnění období měření jednotlivých pozorovatelů

Tab. 1 Přehled pozorovatelů

Jméno	Počet řad	Průměrná jednotková směrodatná odchylka [vteřiny]
Čepek Aleš	92	0,29
Holota Petr	141	0,44
Kostecký Jan	261	0,21
Kostecký Jakub	39	0,36
Novák Pavel I.	412	0,24
Novák Pavel II.	32	0,28
Skoupý Václav	870	0,25
Turner Miroslav	75	0,27
Vaingát Jiří	40	0,47
Vacek Jan	196	0,38
Vondrák Jan	254	0,29

Tab. 2 Přehled použitých cirkumzenitálů

Zenitový úhel [stupně minuty]	Počet řad
29 45/46	1 044
29 49	38
29 50	1 064
29 51	138
29 54	98
29 57	16
29 58	2
29 59	4
30 00	5
30 05	14

Analýzu časových řad budeme provádět nezávisle pro astronomickou šířku a pro astronomickou délku. Při analýze provedeme vyrovnání, ve kterém budou neznámé:

- výsledná hodnota astronomické souřadnice (včetně lineárního členu v případě astronomické délky),
- osobní chyby jednotlivých pozorovatelů,
- systematické chyby jednotlivých přístrojů.

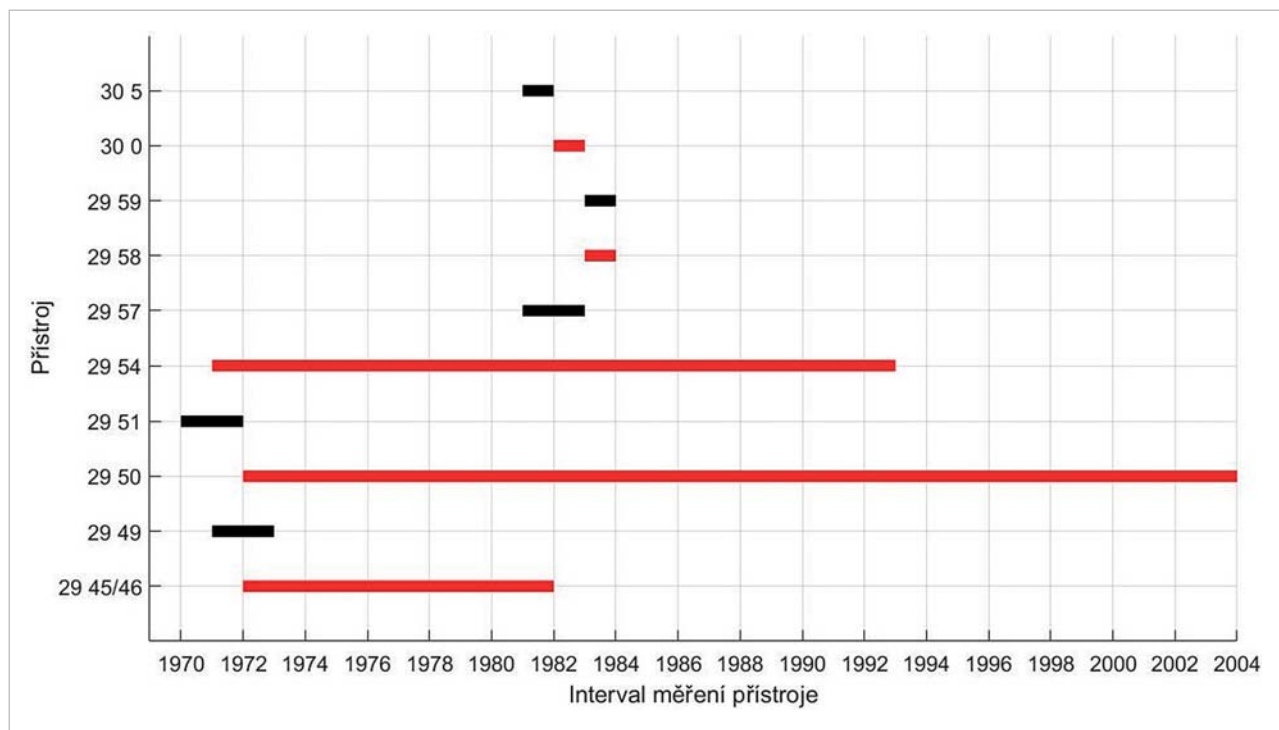
Pro současné určení osobní chyby pozorovatele a systematické chyby přístroje aplikujeme vyrovnání zprostředkujících měření, tj. měření je funkcí vyrovnaných veličin:

$$\bar{y}_i = m + n(t_i - t_1) + o_j + r_k, \quad (11)$$

kde \bar{y}_i je i -té vyrovnané měření, m je průměrná šířka, resp. délka, n je lineární člen délky (u šířky neuvažován), t_i je epocha i -tého měření, t_1 je epocha prvního měření, o_j je osobní chyba j -tého pozorovatele, který měření prováděl, r_k je systematická chyba k -tého přístroje.

Rovnice oprav pak je:

$$v_i = m + n(t_i - t_1) + o_j + r_k - y_i, \quad (12)$$



Obr. 7 Znárodnění období měření jednotlivých přístrojů

kde v_i je oprava i -tého měření y_i ,
Pokud rovnici napíšeme v maticové formě:

$$v = Ax + I, \tag{13}$$

pak je vektor neznámých x :

$$x = \begin{pmatrix} m \\ n \\ o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ \vdots \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{14}$$

vektor pravých stran I je složen ze záporných měření:

$$I = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \\ -y_4 \\ -y_5 \\ \vdots \\ -y_{n-1} \\ -y_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

a matice A obsahuje derivace (které jsou většinou rovné jedné):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & t_2 - t_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_3 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_4 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_5 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & t_6 - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & t_7 - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & t_n - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} \tag{16}$$

Matici vah P definujeme:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{17}$$

kde váha p_i :

$$p_i = \frac{s_0^2}{s_i^2}, \tag{18}$$

kde s_i je směrodatná odchylka měřené řady a s_0 je jednotková směrodatná odchylka, která byla zvolena 0,2".

V případě, kdy určujeme osobní chybu u všech pozorovatelů a systematickou chybu u všech přístrojů, bude matice normálních rovnic singulární. Proto bude potřeba provést vyrovnaní zprostředkující s podmínkou ve verzi, kdy se přidává fiktivní rovnice oprav. Pro osobní chybu všech pozorovatelů zavedeme podmínku, aby součet osobních chyb byl roven nule:

$$0 = \sum_j o_j - 0. \quad (19)$$

Pro systematickou chybu přístrojů zavedeme podmínku, aby přístroj s největším množstvím měřených řad měl systematickou chybu nulovou. Systematické chyby ostatních přístrojů budou vztaženy k tomuto „referenčnímu“ přístroji:

$$0 = r_3 - 0. \quad (20)$$

Pak je matice plánu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & t_2 - t_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_3 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_4 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & t_5 - t_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & t_6 - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & t_7 - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & t_n - t_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (21)$$

a vektor pravých stran

$$I = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Váhu pro fiktivní rovnice (19) a (20) vypočteme z velmi malé směrodatné odchytky. Na základě několika testů jsme zvolili hodnotu 0,0001.

Fiktivní rovnici oprav (19) jsme zavedli pro všechny osobní chyby všech pozorovatelů (aby součet osobních chyb byl roven nule) a fiktivní rovnici oprav (20) jsme za-

Tab. 3 Výsledné astronomické souřadnice

	Hodnota	Směrodatná odchytká
Astronomická šířka	49° 54' 56,196"	0,011"
Astronomická délka (v epoše 16. 2. 1970)	14° 47' 19,851"	0,027"
Lineární změna délky	0,0187"/rok	0,0014"/rok

vedli pro přístroj s největším počtem měřených řad (se zenitovým úhlem 29°50').

6. Výsledky a jejich zhodnocení

Výsledky vyrovnaní jsou uvedeny v tab. 3, 4 a 5. Grafické vyjádření obsahují grafy na obr. 8, 9, 10 a 11, ve kterých chybové úsečky vyjadřují směrodatné odchytky (1σ).

Hodnoty směrodatné odchytky výsledné šířky, resp. délky jsou mezi 1 až 3 setinami vteřiny. Pokud zohledníme, že se jedná o výsledek – „průměr“ – z 2 396 řad, vychází směrodatná odchytká jedné řady (po násobení odmocninou z 2 396) 0,54" v šířce, resp. 1,32" v délce. Přesnost určení astronomické šířky je cca 2,5 vyšší, než přesnost určení astronomické délky.

Výsledné hodnoty astronomické šířky a délky (přepočtené do průměrné epochy 1976,5 tj. 14° 47' 19,970") lze porovnat s výsledky analýzy měření z let 1970 až 1983 v [15]. Tehdejší hodnota astronomické šířky byla 49° 54' 56,251" a hodnota astronomické délky 14° 47' 20,238". Obě hodnoty se liší o -0,055", resp. o -0,268", tj. o více jak pětinašobek, resp. desetinásobek směrodatné odchytky. Lze to vysvětlit několika příčinami: za hlavní příčinu považujeme základní rozdíl ve zpracování – v práci [15] nebyly určovány systematické chyby přístrojů. Další příčinou může být delší časová řada, tj. více zpracovaných dat a více pozorovatelů, tedy i více určených osobních chyb, což při použití podmínky, aby průměr osobních chyb byl nulový, způsobí systematický posun výsledných hodnot astronomických souřadnic.

Vzhledem ke zpracování většího observačního materiálu a zavedení i systematických chyb použitých přístrojů považujeme výsledné astronomické souřadnice za nové konvenční souřadnice pro cirkumzenitál na GO.

V astronomické šířce byly určeny (tj. přesahují dvojnásobek směrodatné odchytky) osobní chyby pozorovatelů Aleše Čepka, Pavla Nováka I., Miroslava Turnera, Jakuba Kosteckého a Jiřího Vaingáta. Poslední dva jmenovaní ale změřili málo řad (39, resp. 40 řad). Jejich osobní chyby jsou do cca 0,1". U ostatních pozorovatelů jsou osobní chyby v šířce pod 0,05".

V astronomické délce byly určeny osobní chyby u většího pozorovatelů (vyjma Aleše Čepka a Jana Kosteckého). Osobní chyby jsou do 0,2" vyjma osobní chyby Jiřího Vaingáta (-0,3"), ale tato chyba je určena pouze ze 40 řad.

Při hodnocení systematických chyb přístrojů je třeba zohlednit, z kolika změřených řad byla systematická chyba přístroje určena. Systematické chyby jsou určeny (tj. přesahují dvojnásobek směrodatné odchytky) jen u velmi vel-

Tab. 4 Osobní chyby pozorovatelů v úhlových vteřinách

Jméno	Astronomická šířka		Astronomická délka	
	Osobní chyba ["]	Směrodatná odchylka ["]	Osobní chyba ["]	Směrodatná odchylka ["]
Čepek Aleš	0,046	0,019	-0,042	0,027
Holota Petr	-0,028	0,020	-0,093	0,029
Kostecký Jan	0,003	0,013	0,019	0,018
Kostecký Jakub	-0,072	0,032	-0,191	0,048
Novák Pavel I.	0,045	0,012	0,160	0,017
Novák Pavel II.	0,025	0,030	0,156	0,042
Skoupý Václav	-0,006	0,011	0,112	0,016
Turner Miroslav	-0,110	0,020	-0,129	0,028
Vaingát Jiří	0,092	0,046	-0,292	0,064
Vacek Jan	-0,002	0,017	0,137	0,024
Vondrák Jan	0,005	0,013	0,164	0,019

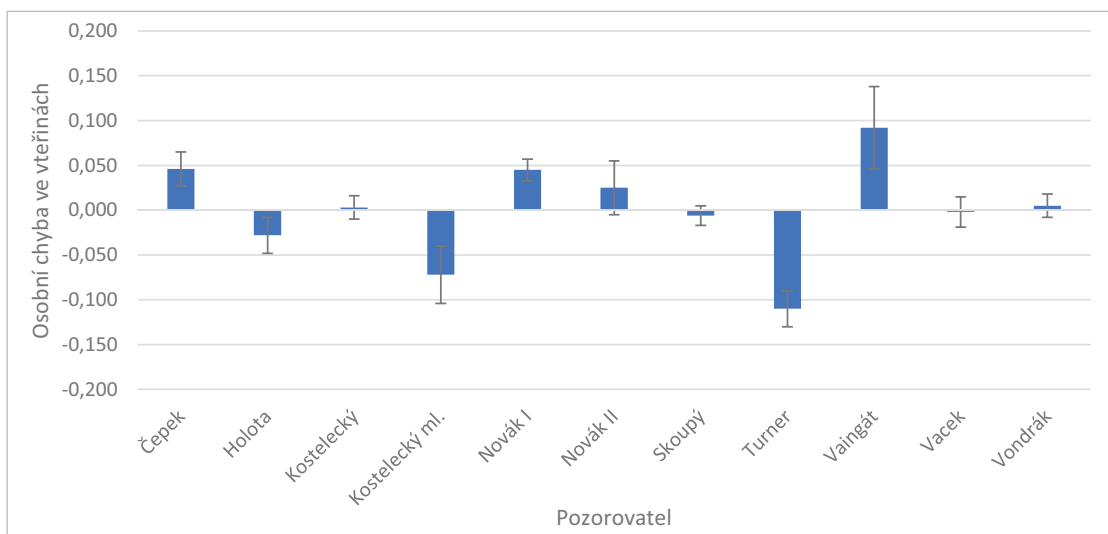
Tab. 5 Systematické chyby přístrojů v úhlových vteřinách – přístroj se zenitovým úhlem 29°50' je referenční

Zenitový úhel přístroje	Astronomická šířka		Astronomická délka	
	Systematická chyba ["]	Směrodatná odchylka ["]	Systematická chyba ["]	Směrodatná odchylka ["]
29° 45'/46'	-0,018	0,016	0,022	0,024
29° 49'	-0,225	0,057	0,169	0,080
29° 50'	0,000	0,000	0,000	0,000
29° 51'	0,038	0,030	-0,017	0,044
29° 54'	-0,042	0,017	-0,156	0,024
29° 57'	-0,055	0,047	-0,010	0,065
29° 58'	-0,208	0,102	-0,313	0,142
29° 59'	-0,206	0,085	0,055	0,118
30° 00'	-0,114	0,066	-0,207	0,092
30° 05'	-0,034	0,040	0,008	0,056

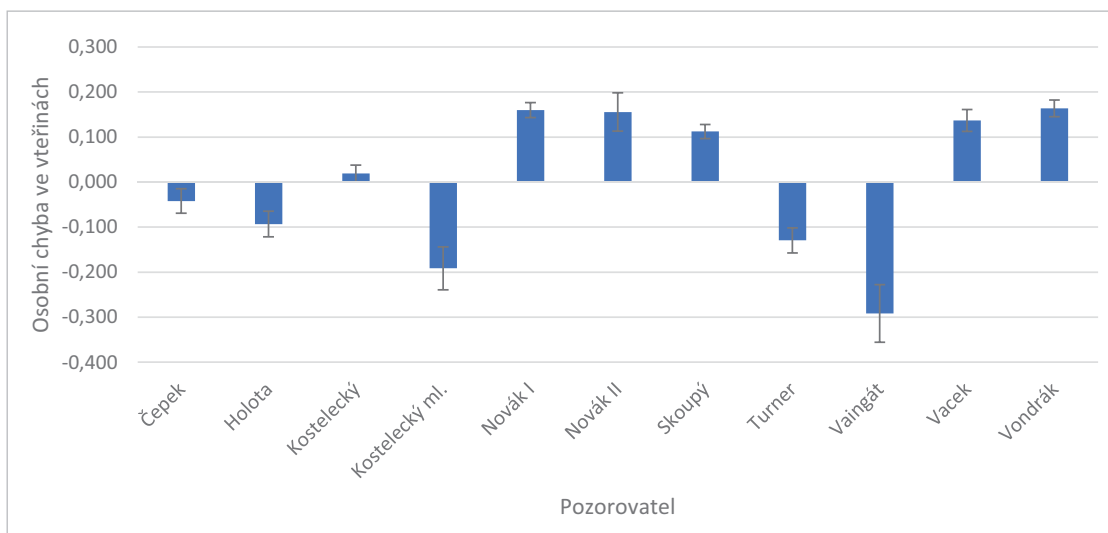
kých systematických chyb, které se vyskytují právě u přístrojů s malým počtem změřených řad (pod 20). To platí i o přístroji se zenitovým úhlem 29°49', který má ve zpracování poměrně malý počet 38 řad.

V astronomické šířce je u přístrojů s počtem změřených řad větším než 100 systematická chyba velmi malá – pod 0,05". Obdobně to platí i v astronomické délce: přístroje s počtem řad větším než 100 mají systematickou chybu menší než 0,05", vyjma přístroje se zenitovým úhlem 29°54', který má při 98 změřených řadách systematickou chybu

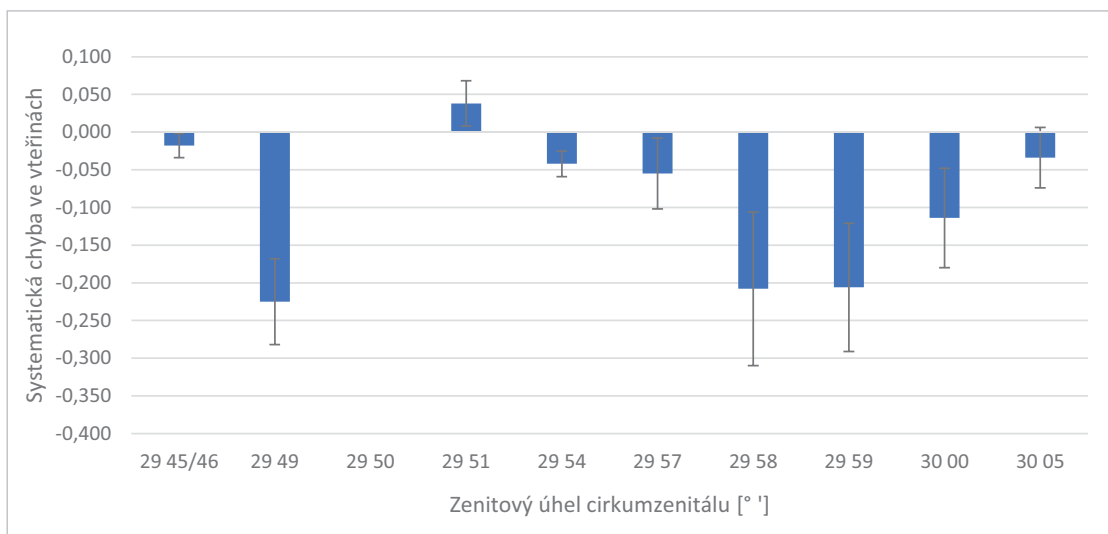
v délce -0,15". Největších systematických chyb dosáhly přístroje se zenitovými úhly 29°58', 30°00' a v šířce i 29°59', jejichž systematické chyby v šířce přesahují 0,1" a v délce 0,2" (v absolutní hodnotě). Všechny tyto výsledky ale vycházejí z malého množství řad (méně jak 5). Výjimkou je přístroj se zenitovým úhlem 29°49', který má z 38 řad systematickou chybu v šířce -0,22" a v délce +0,17". Obecně se ale ukazuje, že cirkumzenitály nemají významnou systematickou chybu v určování astronomické šířky a astronomické délky.



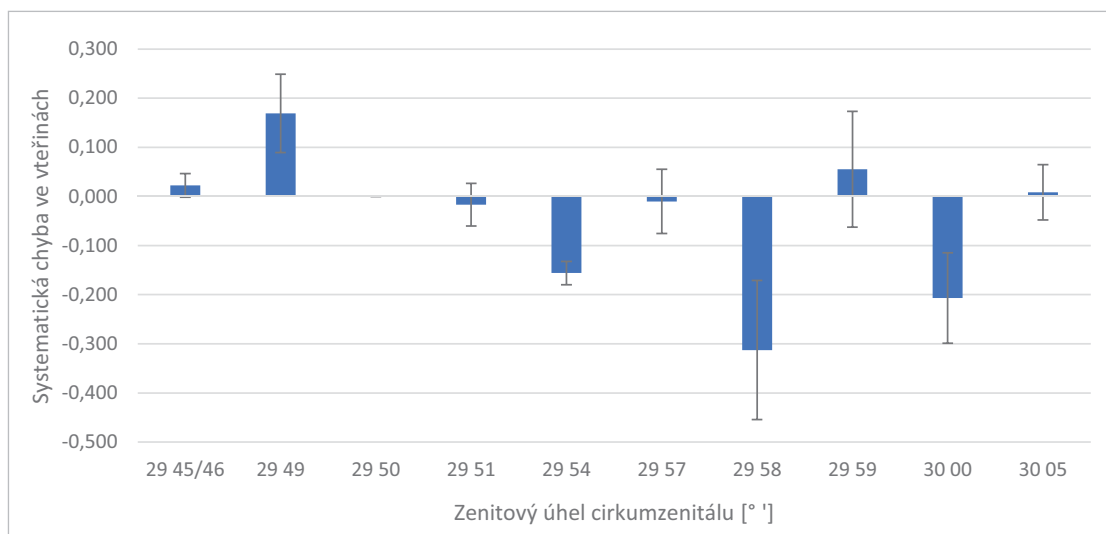
Obr. 8 Osobní chyby pozorovatelů v šířce



Obr. 9 Osobní chyby pozorovatelů v délce



Obr. 10 Systematická chyba přístrojů v šířce



Obr. 11 Systematická chyba přístrojů v délce

7. Závěr

Ze zpracování 2 396 řad měření cirkumzenitálem z let 1970 až 2003 na GO Gaussovou metodou stejných výšek byl zjištěn lineární trend v zeměpisné délce a byly určeny nové konvenční astronomické souřadnice. Při zpracování byly určeny osobní chyby všech pozorovatelů a systematické chyby jednotlivých přístrojů vůči referenčnímu přístroji se zenitovým úhlem $29^{\circ}50'$ a největším počtem změřených řad. Osobní chyby pozorovatelů se v šířce pohybují v rozmezí do $0,05''$, vyjma pozorovatelů s malým počtem měření, kteří mají osobní chybu až $0,1''$. V délce jsou osobní chyby pozorovatelů vyšší – až $0,2''$ (maximální je osobní chyba $-0,3''$ u pozorovatele, který ale pozoroval pouze 40 řad). Systematické chyby přístrojů, které byly použity pro měření více jak 100 řad, se v šířce neprokázaly (jsou nižší jak $0,05''$). V délce byly určeny systematické chyby přístrojů o velikosti $0,05''$ až $0,15''$. Větší systematické chyby byly určeny pouze u přístrojů, které změřily méně jak 40 řad. Obecně lze konstatovat, že Gaussova metoda stejných výšek realizovaná cirkumzenitálem VÚGTK určuje astronomickou šířku s větší přesností (cca $2,5x$), než je přesnost astronomické délky, a že nebyla prokázána významná systematická chyba v určování astronomické šířky a délky pomocí cirkumzenitálů VÚGTK.

Poděkování

Autoři děkují lektorovi Ing. Janu Vondrákovi, DrSc. za všechny věcné a velmi užitečné připomínky jak ke zpracování dat, tak k samotnému článku.

LITERATURA:

- [1] NUŠL, F.-FRIČ, J. J.: Troisième etude sur l'appareil circumzénithal. Publ. de l'Observatoire Nat. de Prague, 1925.
- [2] BAUERŠÍMA, I.-ŠURÁŇ, J.: Verbessertes unpersönliches Mikrometer für das Zirkumzenital. *Studia geoph. et geod.* Vol. 7, p. 209, 1963.
- [3] VONDRÁK, J.: New Circumzenithal of Research Institute for Geodesy, Topography and Cartography in Prague. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia.* Vol. 21, No. 4, pp. 264-268, Academia, Praha, 1970.
- [4] PEŠEK, I.-HEFTY, J.-SKOUPÝ, V.: Optical positions of seventeen radio stars from circumzenithal observations by the method of equal altitudes. *Astro-*

nomy&Astrophysics Supplement Series. Vol. 118, No. 2, pp. 227-230. DOI: 10.1051/aas:1996191, 1996.

- [5] Earth orientation data - IERS [online]. [cit.2020-05-01]. Dostupné z: <https://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/EarthOrientationData/eop.html>.
- [6] VONDRÁK, J.: Cirkumzenitál – československý přínos geodetické astronomii. *Geodetický a kartografický obzor*, 21/83, 1975, č. 11, s. 303-310.
- [7] BECK, A.: Über einige Anwendungen ebener Spiegel. *Ztschr. f. Instrumentenkunde.* Vol. 7, p. 380, 1887.
- [8] CLAUDE, A.: Sur l'emploi d'un prisme à reflexion dans les lunettes. *Bull. Astr.* Vol. XVII, No. 19, 1900.
- [9] NUŠL, F.-FRIČ, J. J.: Note sur deux appareils sans niveaux pour la détermination de l'heure et de la latitude. *Bull. Astr.* Vol. XIX, No. 261, 1902.
- [10] BUCHAR, E.: Novyj bezličnyj mikrometr dlja cirkumzenitala. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia.* Vol. 4, p. 77, Academia, Praha, 1953.
- [11] KABELÁČ, J.: *Geodetická astronomie 10.* Skripta. Vydavatelství ČVUT v Praze. ISBN 80-01-01833-4, 2001.
- [12] ŠIMEK, J.: *Statistické zpracování astronomických pozorování cirkumzenitálem z let 1970-2003.* Bakalářská práce. ČVUT v Praze, 2020.
- [13] PEŠEK, I.: Almucantar Deformations in the Method of Equal Altitudes. *Astronomy&Astrophysics.* Vol. 262, No. 2, pp. 621-623, 1992.
- [14] KARSKÝ, G.: Changes in Personal Equations of Circumzenithal Observers. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia.* Vol. 36, No. 3, pp. 144-149, Academia, Praha, 1985.
- [15] KOSTEČEKÝ, J.-KARSKÝ, G.: Analysis of 1970-1983 Circumzenithal Measurements. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia.* Vol. 38, No. 1, pp. 16-23, Academia, Praha, 1987.

Do redakce došlo: 10. 12. 2020

Lektoroval:
Ing. Jan Vondrák, DrSc.,
Astronomický ústav AV ČR



Pro příští GaKO připravujeme:

DROŠČÁK, B.: 70 roků Geodetického a kartografického ústavu Bratislava