

## Model lokálního kvazigeoidu v oblasti Dolní Moravy vypočtený astro-geodetickou nivelací

Ing. Richard Kratochvíl,  
Ing. Jakub Nosek,  
Ing. Tomáš Volařík, Ph.D.,  
doc. Ing. Radovan Machotka, Ph.D.,  
Ústav geodézie, FAST VUT v Brně

### Abstrakt

Článek pojednává o výpočtu lokálního modelu kvazigeoidu metodou astro-geodetické respektive astro-topografické nivelace v kombinaci s vyrovnáním podmínkových měření. Model kvazigeoidu byl vytvořen v několika variantách lišících se mírou využití topografických tížnicových odchylek. Primárními daty pro modely byly astro-geodetické tížnicové odchylky určené přímým měřením na 30 bodech. Topografické tížnicové odchylky byly vypočteny z DMR GMTED2010. Výsledné modely byly porovnány mezi sebou a také s QGZÚ-2013 a s GNSS/nivelací. Na základě výsledků vyrovnání byla zjištěna relativní přesnost modelů na úrovni 0,9 až 0,5 mm/km.

### Model of the Local Quasigeoid in the Area of Dolní Morava Calculated by the Astrogeodetic Levelling

### Abstract

The article deals with the calculation of a quasigeoid local model using the astrogeodetic and astrotopographic levelling method. These methods are combined with the least square adjustment of conditional observations. The primary data were astrogeodetic deflections of the vertical determined by direct measurement on 30 points. The topographic deflections of the vertical were computed from the DTM GMTED2010. The resulting models were compared with each other. Furthermore, a comparison was made with the QGZÚ 2013 and with GNSS/levelling. The relative accuracy of the calculated models was found in range 0.9 to 0.5 mm/km.

**Keywords:** quasigeoid, astrogeodetic deflections of the vertical, topographic deflections of the vertical, digital terrain model, astrogeodetic levelling

## 1. Úvod

Astro-geodetické tížnicové odchylky (TO) jsou data získaná kombinací astronomických a geodetických polohových měření na zvolených (tzv. astro-geodetických) bodech a z toho důvodu jsou využitelné pro ověřování modelů kvazigeoidu vytvořených na základě jiných typů dat. Mezi jinými mohou být použity pro ověřování gravimetrických modelů kvazigeoidu, protože astro-geodetické TO jsou nezávislé na gravimetrických datech. Pro výpočet modelu kvazigeoidu z astro-geodetických TO lze použít metodu astro-geodetické nivelace [1], která je výpočetně jednoduchá. Určování astronomické polohy bodů je však časově náročné a metoda astro-geodetické nivelace předpokládá lineární změnu TO mezi sousedními astro-geodetickými body. Tento předpoklad bývá obtížné splnit a vede k nutnosti malé vzdálenosti mezi astro-geodetickými body.

Z tohoto důvodu je vhodnější použít některou z variant astro-geodetické nivelace využívající pro interpolaci astro-geodetických TO gravimetrické nebo topografické TO. Následně hovoříme buď o astro-gravimetrické [2] nebo astro-topografické [3] nivelaci. Obě metody umožňují výrazně zvětšit vzdálenost mezi sousedními astro-geodetickými body. Pro kontrolu gravimetrických modelů kvazigeoidu lze bez obav použít druhou z metod, u astro-gravimetrické metody je nutné mít na zřeteli, že jedním z jejích vstupů jsou gravimetrická data a její výsledky tedy nejsou zcela nezávislým ověřením gravimetrického modelu kvazigeoidu.

Porovnáním modelů kvazigeoidu vypočtených z různých dat je diskutováno v několika vědeckých pracích.

Porovnání modelu kvazigeoidu vypočteného astro-geodetickou nivelací se 3 gravimetrickými modely je provedeno v práci [4] v oblasti Bavorských Alp na profilu dlouhém přibližně 23 km. Výsledná směrodatná odchylka astro-geodetického modelu se pohybuje od 4 mm do 2 cm v závislosti na zvoleném gravimetrickém modelu. Porovnání plošného astro-geodetického modelu kvazigeoidu s gravimetrickým modelem je provedeno v [5] v oblasti města Brna. Zde je směrodatná odchylka rozdílů výškových anomálií mezi astro-geodetickým a gravimetrickým modelem kvazigeoidu 3 mm. V [5] byly astro-geodetické TO určeny stejným přístrojem, jako v této práci, tedy Motorizovaným automatickým astronomickým systémem (MAAS-1) [6]. Astro-geodetická nivelace s interpolací byla pro porovnání použita na profilu v Bavorských Alpách, kde bylo využito astro-topografické nivelace [7] a je předpokládáno, že při délce profilu 60 km a rozestupu astro-geodetických bodů 3 km bude směrodatná odchylka výškových anomálií okolo 1 cm. Obdobných výsledků bylo dosaženo na profilu Velká Bíteš – Brno – Uherské Hradiště, kde byly TO vypočteny kombinací astro-geodetických TO [8], topografických dat z digitálního modelu reliéfu (DMR) a dat z Earth Gravitational Model 2008 [9]. Bylo dosaženo směrodatné odchylky 1 cm ve výškových anomáliích bodů na profilu dlouhém 100 km a s rozestupy astro-geodetických bodů přibližně 3,5 km.

Článek se zabývá výpočtem plošného modelu kvazigeoidu v několika variantách v oblasti Králického Sněžníku metodou astro-geodetické a astro-topografické nivelace. Zhodnocena byla vnitřní přesnost vypočtených modelů a bylo provedeno porovnání s Podrobným kvazigeoidem QGZÚ-2013 [10] a s výsledky GNSS/nivelace.

## 2. Astrogeodetická nivelace

Teorie astro-geodetické nivelace je popsána např. v [1], [11]. Jedná se o výpočet změny odlehlosti hladinové plochy od plochy referenčního elipsoidu na spojnici dvou bodů. Pro tento výpočet je potřeba znát astro-geodetické TO na počátečním a koncovém bodě spojnice vypočtené podle vztahů:

$$\xi^* = \varphi^* - \varphi, \quad (1)$$

$$\eta^* = (\lambda^* - \lambda) \cos \varphi, \quad (2)$$

kde  $\xi^*$  je meridiánová složka astro-geodetické TO,  $\eta^*$  je příčná složka astro-geodetické TO,  $\varphi$  je geodetická (elipsoidická) zeměpisná šířka,  $\varphi^*$  je astronomická zeměpisná šířka,  $\lambda$  je geodetická (elipsoidická) zeměpisná délka a  $\lambda^*$  je astronomická zeměpisná šířka. Takto vypočtené astro-geodetické TO se nazývají Helmertovy. Pro výpočet kvazigeoidu se Helmertovy astro-geodetické TO musí opravit o vliv zakřivení normální tížnice na příčnou složku astro-geodetických TO dle Moloděnského, které se vypočtou užitím vztahu [12]:

$$\xi_{\text{Helmert}} = \xi_{\text{Moloděnský}} - 0,17'' H \sin 2\varphi, \quad (3)$$

kde  $H$  je elipsoidická výška bodu v kilometrech a druhý člen polynomu na pravé straně rovnice vyjde v úhlových vteřinách. Vliv zakřivení normální tížnice na příčnou složku astro-geodetické TO je zanedbatelný [12]. V dalším textu jsou symbolem  $*$  označeny astro-geodetické TO podle Moloděnského.

Pro výpočet astro-geodetické nivelace je potřeba znát astro-geodetickou TO  $\varepsilon^*$  v azimutu a spojnice bodů, vypočtenou podle:

$$\varepsilon^* = \xi^* \cos \alpha + \eta^* \sin \alpha. \quad (4)$$

Změna odlehlosti kvazigeoidu od elipsoidu se počítá podle vzorce:

$$\Delta\zeta_{A,B} = \zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \varepsilon^* ds - \int_A^B \frac{\Delta g}{\gamma} dh, \quad (5)$$

kde indexy  $A$  a  $B$  značí počáteční, respektive koncový bod spojnice,  $ds$  je element délky spojnice,  $\Delta g$  je Fayova anomálie v bodě a  $dh$  je element převýšení mezi body na spojnici. První člen polynomu na pravé straně rovnice (5) je vztah pro astro-geodetickou nivelaci, druhý člen je gravimetrická korekce, která je obdobou normální korekce zaváděné u nivelčních měření v systému Bpv [13] a dále v textu bude značena  $k_{gr}$ .

Při použití metody astro-topografické nebo astro-gravimetrické nivelace jsou na spojnici sousedních astro-geodetických bodů vloženy pomocné výpočetní body. Následně jsou pro všechny body (vložené i astro-geodetické) spočítány topografické nebo gravimetrické TO (dle typu dostupných dat). Na astro-geodetických bodech jsou spočteny rozdíl mezi astro-geodetickými TO a topografickými/gravimetrickými TO (tzv. rezidua). Následně se vyinterpolují rezidua na všech vložených bodech spojnice a tyto se přičtou k topografickým/gravimetrickým TO. Tím jsou vypočteny astro-geodetické TO na všech bodech spojnice a může být použit vzorec (5).

## 3. Síť Dolní Morava

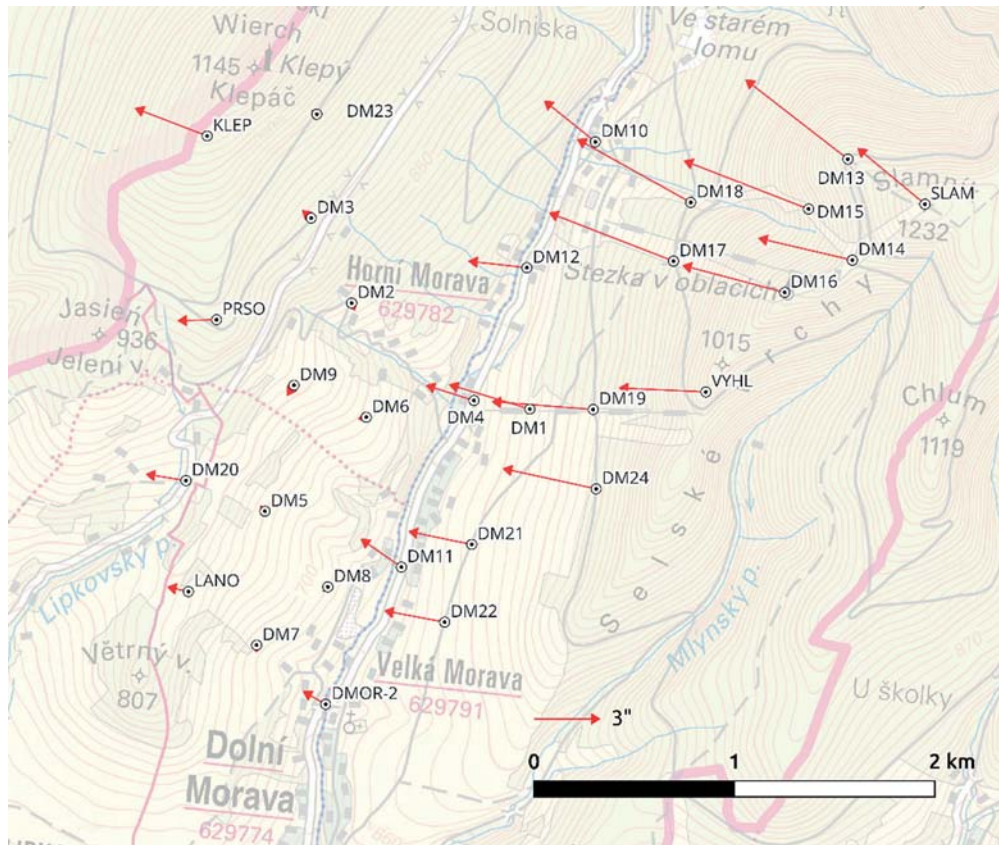
Síť Dolní Morava (DM) se nachází v okolí obce Dolní Morava na úpatí masivu Králického Sněžníku. Síť pokrývá oblast asi 6 km<sup>2</sup> a je výrazně výškově členěná. Nadmořské výšky bodů se pohybují v rozmezí 623 až 1 232 m. Vybudována byla ve 4 etapách mezi lety 2014–2017. Během této doby byly v síti určeny astro-geodetické TO na 30 bodech jako rozdíl mezi astronomickými a geodetickými zeměpisnými souřadnicemi bodů (obr. 1). Astronomické souřadnice bodů byly určeny prostřednictvím MAAS-1 metodou párů stejné výšky [14]. Geodetické souřadnice bodů v systému ETRS89 a elipsoidické výšky vůči elipsoidu GRS-80 byly určeny technologií globálních navigačních družicových systémů (GNSS) metodou real time kinematic (RTK). Přesnost TO vypočtených z těchto dat je dána hlavně přesností astronomických měření. Při použití systému MAAS-1 lze očekávat směrodatnou odchylku složek TO na úrovni 0,3'' [6].

Síť DM navazuje na již existující experimentální síť Sněžník [15], [16], ze které přebírá některé body (body VYHL, KLEP, DMOR-2, SLAM, PRSO a LANO) a jejich elipsoidické výšky ([17], tab. 7-11). Nadmořské výšky bodů DMOR-2, KLEP, PRSO, VYHL, DM1, DM2, DM10, DM11 a DM12 byly určeny přesnou nivelací z bodů nivelčního pořadu FZ7 Králíky Lipová – 1. odbočného nivelčního pořadu. Průměrná směrodatná odchylka elipsoidických výšek přebíraných bodů ze sítě Sněžník je v práci [17] odhadnuta na 8 mm. Elipsoidické výšky bodů v rámci měření v síti DM byly určeny metodou RTK. Průměrná směrodatná odchylka elipsoidické výšky je u nich odhadnuta na 2-3 cm. V zájmové oblasti byly k dispozici Bouguerovy anomálie z gravimetrického mapování 1 : 50 000.

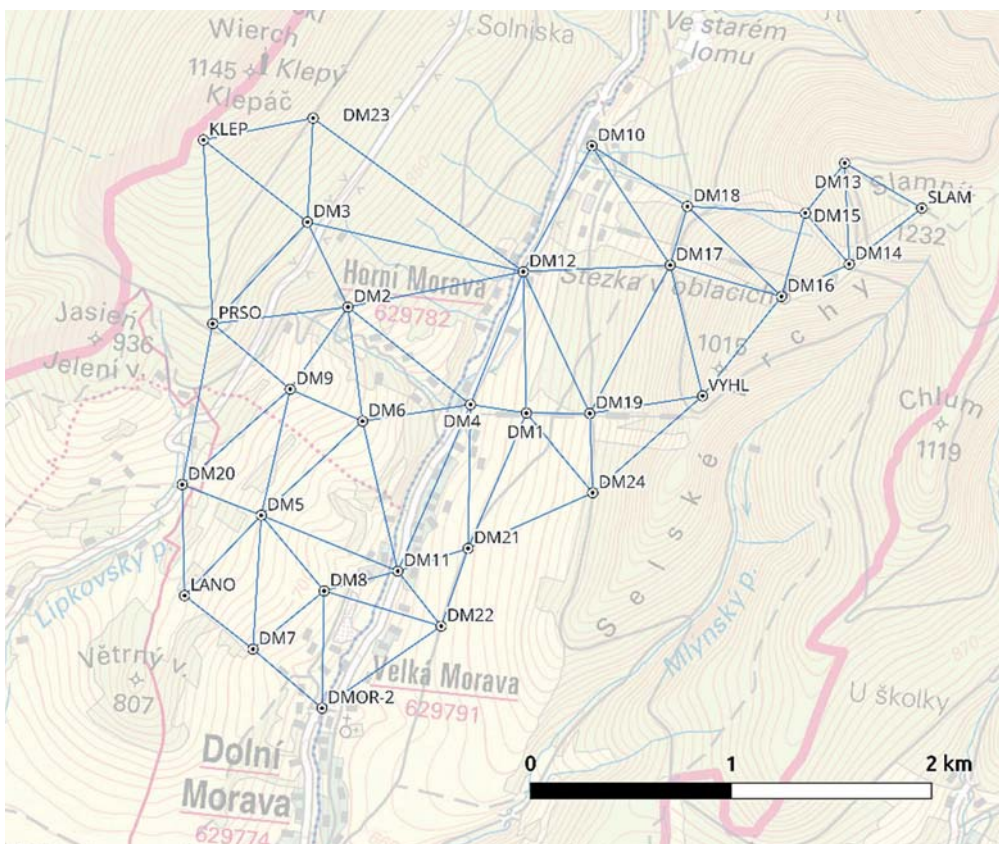
## 4. Výpočet modelu kvazigeoidu

Před samotným výpočtem modelu kvazigeoidu astro-geodetickou nebo astro-topografickou nivelací byla provedena triangularizace sítě. Byla použita Delaunayho triangulace s dodatečnou podmínkou pro velikost maximálního úhlu v trojúhelníku, aby byly vyloučeny štíhlé trojúhelníky na okraji sítě. Síť byla triangularizována jako 2D síť, protože jak je prokázáno v [19], výšková složka sítě může být zanedbána bez zásadního vlivu na výsledný model kvazigeoidu. Hodnota maximálního úhlu v trojúhelníku byla nastavena na 115°. Síť byla rozdělena na 39 trojúhelníků a má 68 spojnic bodů. Průměrná délka spojnice je 600 m. Výsledná triangulace sítě byla použita pro tvorbu všech níže uvedených astro-geodetických a astro-topografických modelů. Je znázorněna na obr. 2.

Postup vyrovnání astro-geodetických sítí metodou zprostředkujícího vyrovnání je popsán v [11]. Tento model vyrovnání pracuje s pseudoměřeními veličinami, tedy s převýšeními na kvazigeoidu mezi body sítě. Všechna převýšení na kvazigeoidu v jednom bodě jsou spolu korelována na základě jejich azimutu, protože jsou vypočtena z TO v tomto bodě. Pro vyřešení takové úlohy je předpokladem znalost kovarianční matice. Nevýhodou tohoto způsobu vyrovnání je skutečnost, že jím lze získat jen směrodatné odchylky převýšení mezi body a směrodatně odchylky výškových anomálií. Z nich lze jen obtížně vypočítat přesnost měřených veličin, tedy astro-geodetických TO. Z toho důvodu byl zvolen postup vyrovnání jako v práci [20], kde bylo použito vyrovnání podmínkových měře-



Obr. 1 Astro-geodetické TO v síti DM, mapový podklad ZM ČR 1 : 10 000 [18]



Obr. 2 Výsledná triangulace sítě DM, mapový podklad ZM ČR 1 : 10 000 [18]

ní. U podmínkového vyrovnání lze vypočítat směrodatnou odchylku měřených a vyrovnaných astro-geodetických TO a také směrodatnou odchylku výškových anomálií.

Při vyrovnání sítě byla kladena podmínka, že součet převýšení v trojúhelníku musí být nulový. Uzávěry při vyrovnání astro-geodetického řešení se počítaly dle [19]:

$$u = - \left( \frac{\xi_A^* + \xi_B^*}{2} \cos \alpha_{A,B} + \frac{\eta_A^* + \eta_B^*}{2} \sin \alpha_{A,B} \right) s_{A,B} + k_{gr A,B} - \left( \frac{\xi_B^* + \xi_C^*}{2} \cos \alpha_{B,C} + \frac{\eta_B^* + \eta_C^*}{2} \sin \alpha_{B,C} \right) s_{B,C} + k_{gr B,C} - \left( \frac{\xi_C^* + \xi_A^*}{2} \cos \alpha_{C,A} + \frac{\eta_C^* + \eta_A^*}{2} \sin \alpha_{C,A} \right) s_{C,A} + k_{gr C,A} = \Delta \zeta_{A,B} + \Delta \zeta_{B,C} + \Delta \zeta_{C,A} \quad (6)$$

kde  $s_{A,B}$  je vzdálenost mezi příslušnými body,  $\alpha_{A,B}$  azimut jejich spojnice a  $k_{gr A,B}$  příslušná gravimetrická korekce, viz vzorec (5).

Výpočet astro-topografického řešení obsahuje navíc proti výše uvedenému interpolaci složek astro-geodetických TO pro vložené body na spojnicích. Byla použita lineární interpolace a vztah (6) byl o její výpočet rozšířen. Pro přehlednost zde bude uveden pouze výpočet převýšení na jedné spojnici:

$$\Delta \zeta_{A,B} = \sum_{i=A}^B \left[ - \frac{\left( \xi_A^* + \left[ (\xi_B^* - \xi_B^i) - (\xi_A^* - \xi_A^i) \right] \frac{s_{A,i}}{s_{A,B}} + (\xi_A^* - \xi_A^i) + \xi_i^t \right) \cos \alpha_{A,B} + \left( \eta_A^* + \left[ (\eta_B^* - \eta_B^i) - (\eta_A^* - \eta_A^i) \right] \frac{s_{A,i}}{s_{A,B}} + (\eta_A^* - \eta_A^i) + \eta_i^t \right) \sin \alpha_{A,B}}{2} + s_{i,i+1} + k_{gr i,i+1} \right] \quad (7)$$

Zde  $i = A, 1, 2, \dots, B$  a  $\xi^t$  a  $\eta^t$  jsou složky topografických TO. Vztahy pro výpočet převýšení mezi body na kvazigeoidu zbylých dvou stran v trojúhelníku lze získat provedením cyklické záměny.

Astro-topografický model kvazigeoidu byl vypočten ve variantách 1, 2, 4, 6 a 8 vložených bodů na spojnici sousedních astro-geodetických bodů. Tyto varianty vyrovnání budou dále označovány jako AT1 až AT8. Astro-geodetické řešení bude dále označováno jako AG.

Jelikož metody astro-geodetické a astro-topografické nivelace neposkytují informaci o absolutním umístění modelu kvazigeoidu vůči elipsoidu, byla hodnota výškové anomálie v bodě DM4 u všech řešených modelů kvazigeoidu ztotožněna s hodnotou výškové anomálie modelu QGZÚ-2013.

#### 4.1 Výpočet topografických TO

Složky topografických TO byly vypočteny podle [21] z DMR Global Multi-resolution Terrain Elevation Data 2010 (GMTED2010) [22]. Tento model byl vybrán pro svůj globální charakter, pro tento účel dostatečné rozlišení a výškovou přesnost a také pro to, že je ve svém plném rozsahu dostupný zdarma. Jiné modely reliéfu nebyly tes-

továny. GMTED2010 reprezentuje zemský reliéf gridem s rozlišením 7,5 x 7,5", směrodatná odchylka v určení výšky je 27 m. Zemský reliéf lze tedy rozdělit na kuboidy, jejichž podstava má rozměry 7,5 x 7,5" a jejichž výška se vypočte jako průměrná nadmořská výška bodů horní podstavy kuboidu. Gravitační potenciál  $V$  takovýchto kuboidů lze analyticky vyřešit např. podle [23], [24]. Gravitační vlivy  $V_x^t$  a  $V_y^t$  kuboidů na výpočetní bod  $P$  lze vypočítat, jako horizontální derivace jejich gravitačního potenciálu  $V$ :

$$V_x^t = G\rho \left| \left| y \ln(z+r) + z \ln(y+r) - x \tan^{-1} \frac{yz}{xr} \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad (8)$$

$$V_y^t = G\rho \left| \left| z \ln(z+r) + y \ln(z+r) - y \tan^{-1} \frac{xz}{yr} \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad (9)$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $r$  je vzdálenost kuboidu od výpočetního bodu  $P$ , ve kterém je umístěn počátek topocentrické souřadnicové soustavy a  $x_i, y_i, z_i$  jsou souřadnice stěn kuboidů vzhledem k výpočetnímu bodu  $P$  [21], [25].

Vliv topografie na bod  $P$  se vypočte jako suma gravitačních vlivů  $V_x^t$  a  $V_y^t$  jednotlivých kuboidů. Složky topografických TO  $\xi^t$  a  $\eta^t$  se vypočtou jako podíl sumy gravitačních vlivů a normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  v bodě  $P$  [21]:

$$\xi^t = \frac{\sum V_y^t}{\gamma}, \quad (10)$$

$$\eta^t = \frac{\sum V_x^t}{\gamma}. \quad (11)$$

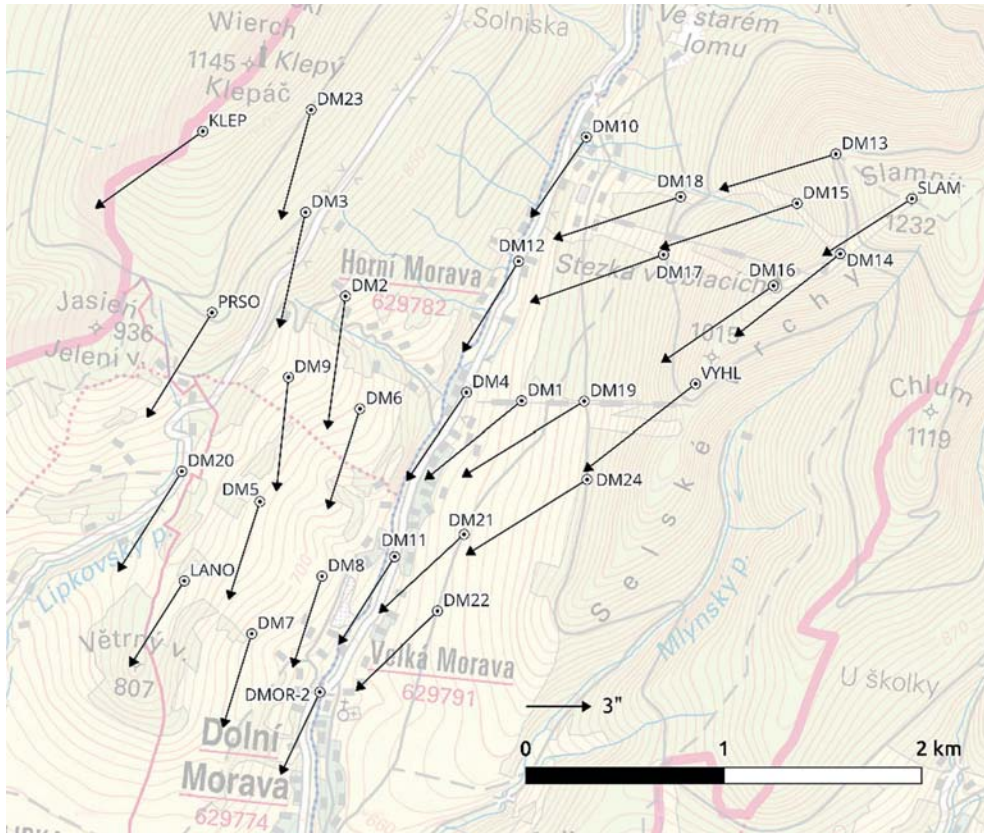
Z důvodu nedostatečné znalosti geologických podmínek v lokálním měřítku byla pro výpočet složek topografických TO použita konstantní hodnota hustoty zemské kůry, konkrétně její průměrná hodnota  $\rho = 2,67 \text{ g.cm}^{-3}$ . Vliv topografie byl počítán z oblasti o poloměru 9 km okolo bodu  $P$ . Poloměr byl volen s ohledem na krok gridu použitého DMR a s přihlédnutím pouze na blízké zóny. Zahrnutí středních a vzdálených zón by mělo vliv pouze na absolutní hodnoty topografických TO, ale ne na výsledně interpolované TO. Pro výpočet normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  byl použit Somigliánův vzorec [26]. Na obr. 3 jsou zobrazeny topografické složky TO.

Na obr. 4 je znázorněn model kvazigeoidu AT1, který byl vypočten astro-topografickou nivelací s jedním vloženým bodem na spojnici.

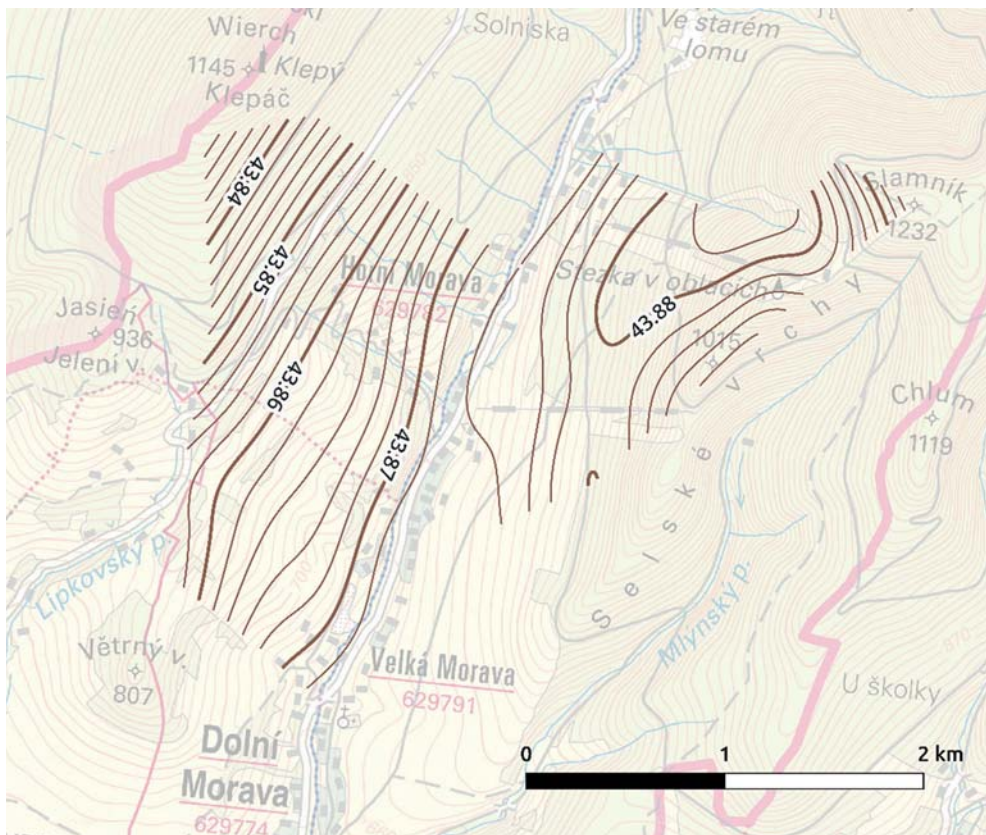
#### 5. Analýza přesnosti

Předmětem analýzy je vzájemné porovnání astro-geodetického a astro-topografického řešení a vyhodnocení přínosu přidávání mezilehlých bodů na spojnice astro-geodetických bodů. Následně je provedeno porovnání vypočtených modelů kvazigeoidu s modelem QGZÚ-2013.

Z vyrovnání sítě byly získány odhady aposteriorních směrodatných odchylek složek měřených astro-geodetických TO  $\sigma_{TO}^{APOST}$  (tab. 1). Je možné si povšimnout snižování  $\sigma_{TO}^{APOST}$  se vzrůstajícím počtem vložených bodů na spojnici sítě. Hodnoty vyjadřují míru souladu vyrovnaných TO s měřeními.



Obr. 3 Topografické TO v síti DM, poloměr integrační oblasti 10 km, mapový podklad ZM ČR 1 : 10 000 [18]



Obr. 4 Astro-topografický model kvazigeoidu AT1 s jedním vloženým bodem na spojnici (interval izolinií 2 mm), mapový podklad ZM ČR 1 : 10 000 [18]

Dále byly porovnány průměrné směrodatné odchylky vyrovnaných astro-geodetických TO  $\sigma_{\overline{TO}}$  (tab. 2) a směrodatné odchylky vyrovnaných výškových anomálií  $\sigma_{\xi}$  (tab. 3).

Z porovnání vyplývá, že při přidání jednoho vloženého bodu na spojnici, klesnou směrodatné odchylky vyrovnaných astro-geodetických TO  $\sigma_{\overline{TO}}$  přibližně o 38 %. Postupným přidáváním vložených bodů byly hodnoty směrodatný odchylek  $\sigma_{\overline{TO}}$  sníženy až o 46 % při 8 vložených bodech na spojnici. Podobný efekt je viditelný i u směrodatných odchylek výškových anomálií  $\sigma_{\xi}$ .

Pro lepší představu jsou data z tab. 1 a tab. 2 graficky znázorněna v obr. 5.

Pokles směrodatných odchylek při dvou a více vložených bodech není oproti variantě s jedním vloženým bodem nikterak razantní, rozdíl mezi variantou AT1 a AT8 je pouze 10 %. To je s největší pravděpodobností způsobeno faktem, že použité astro-geodetické i topografické TO mají konečnou přesnost a zlepšení způsobu interpolace TO je jen jedním z faktorů určujících přesnost výsledků.

Relativní přesnost modelu lze vyjádřit jako poměr směrodatné odchylky převýšení dvou nejvzdálenějších bodů na

kvazigeoidu k jejich vzdálenost. Takovými body v síti DM jsou body SLAM a LANO. Jejich vzdálenost je 4,150 km. Směrodatné odchylky výškových anomálií bodů SLAM a LANO jsou uvedeny v tab. 4. Z hodnot v tabulce vyplývá, že u astro-geodetického řešení je poměr směrodatné odchylky převýšení nejvzdálenějších bodů k jejich vzdálenosti přibližně roven 0,9 mm/km. Při astro-topografickém řešení s osmi vloženými body je tento poměr přibližně roven 0,5 mm/km. Jedná se o hodnoty získané vyrovnaním měřených dat, a tedy odrážejí vnitřní přesnost modelů. Lze je považovat za optimistické odhady skutečné přesnosti.

Tab. 5 obsahuje průměrné směrodatné odchylky  $\sigma_{QGZU}$  rozdílů mezi výškovými anomáliemi modelu QGZU-2013 a výškovými anomáliemi z AG a AT modelů.

Data v tab. 5 ukazují podstatně vyšší hodnoty směrodatných odchylek AG a AT modelů než tab. 4. Příčinu je nutno hledat v přesnosti QGZU-2013. Dle [10] je přesnost výškové anomálie modelu QGZU-2013 v oblastech do 10 km od státní hranice nejvýše 3 cm. Hodnoty v tab. 5 tak ukazují relativně dobrou shodu mezi modelem QGZU-2013 a vypočtenými AG a AT modely. Nicméně pro zjištění skutečné přesnosti AG a AT modelů je přesnost QGZU-2013 jako referenčního mo-

Tab. 1 Odhady aposteriorních směrodatných odchylek měřených veličin (astro-geodetických TO)  $\sigma_{TO}^{APOST}$

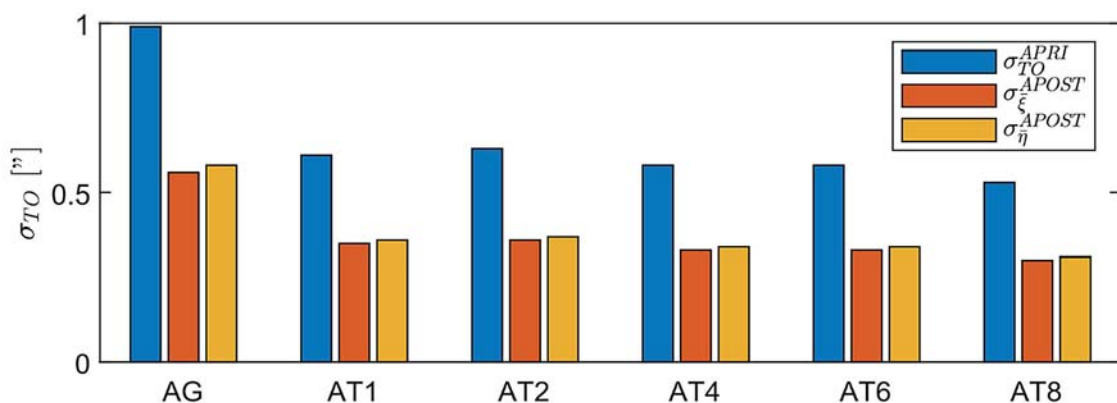
	AG	AT1	AT2	AT4	AT6	AT8
$\sigma_{TO}^{APOST}$	0,99"	0,61"	0,63"	0,58"	0,58"	0,53"

Tab. 2 Průměrné směrodatné odchylky vyrovnaných astro-geodetických TO  $\sigma_{\overline{TO}}$

	AG		AT1		AT2		AT4		AT6		AT8	
	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
$\sigma_{\overline{TO}}$	0,56"	0,58"	0,35"	0,35"	0,36"	0,37"	0,33"	0,34"	0,33"	0,34"	0,30"	0,31"

Tab. 3 Směrodatná odchylka vyrovnaných výškových anomálií  $\sigma_{\xi}$

	AG	AT1	AT2	AT4	AT6	AT8
$\sigma_{\xi}$	1,9 mm	1,1 mm	1,2 mm	1,1 mm	1,1 mm	1,0 mm



Obr. 5 Znáznornění výsledných směrodatných odchylek TO, zdroj [autor]

delu nedostatečná. Rovněž neumožňuje věrohodně prokázat přínos topografických dat a počtu vložených bodů u AT řešení.

Z toho důvodu bylo provedeno i porovnání vypočtených modelů kvazigeoidu s GNSS/nivelací na 9 bodech sítě (DMOR-2, KLEP, PRSO, VYHL, DM1, DM2, DM10, DM11 a DM12). Průměrné směrodatné odchylky rozdílů výškových anomálií  $\sigma_{GNSS/niv}$  jsou uvedeny v **tab. 6**. Data ukazují lepší shodu AG a AT modelů s výsledky GNSS/nivelace než jakou vykazuje model QGZÚ-2013. To je známkou vyšší kvality

AG a AT modelů oproti QGZÚ-2013 z hlediska přesnosti a podrobnosti.

Nicméně směrodatné odchylky v **tab. 6** jsou vyšší než v **tab. 5**, což ukazuje na nižší přesnost GNSS/nivelace oproti QGZÚ-2013. Vzhledem k nízké přesnosti referenčních dat nelze ani na základě výsledků GNSS/nivelace určit skutečnou přesnost AG a AT modelů.

Shodu AG a AT modelů s modelem QGZÚ-2013 lze vyjádřit pomocí mapy rozdílů výškových anomálií. Na **obr. 6** jsou izoliniemi znázorněny rozdíly mezi AT1 a QGZÚ-2013.

**Tab. 4** Směrodatné odchylky vyrovnaných výškových anomálií bodů SLAM a LANO

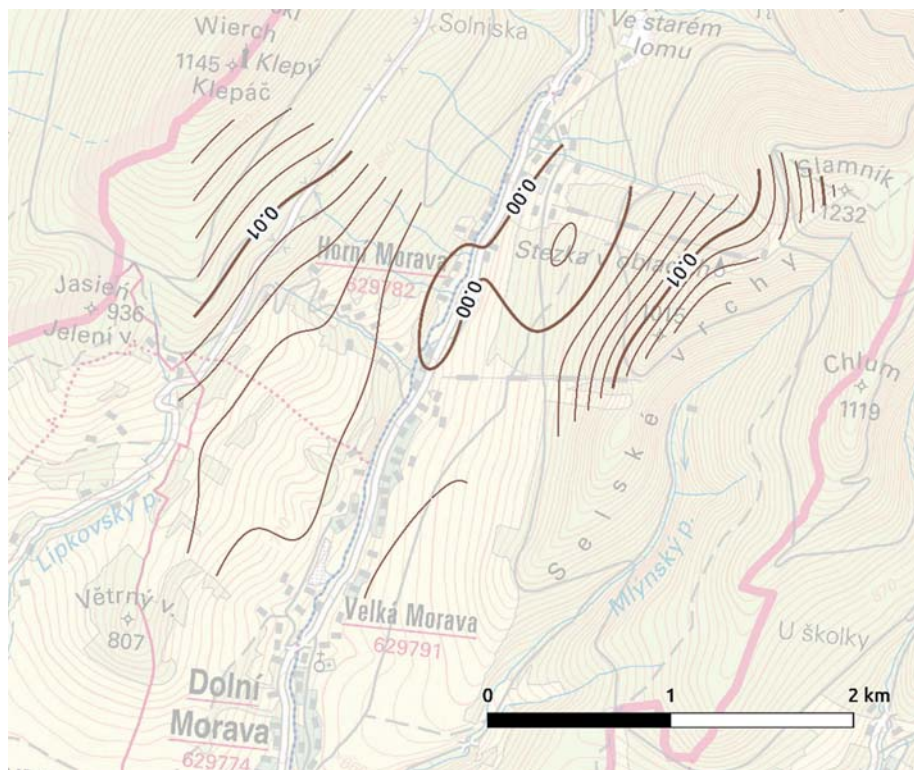
	AG	AT1	AT2	AT4	AT6	AT8
$\sigma_{\zeta_{SLAM}}$	3,2 mm	2,0 mm	2,1 mm	1,9 mm	1,9 mm	1,7 mm
$\sigma_{\zeta_{LANO}}$	2,1 mm	1,3 mm	1,4 mm	1,3 mm	1,3 mm	1,2 mm

**Tab. 5** Průměrná směrodatná odchylka rozdílů výškových anomálií  $\sigma_{QGZÚ}$  modelu QGZÚ 2013 a modelů AG a AT

	AG	AT1	AT2	AT4	AT6	AT8
$\sigma_{QGZÚ}$	8 mm	7 mm	7 mm	7 mm	7 mm	7 mm

**Tab. 6** Průměrná směrodatná odchylka rozdílů výškových anomálií  $\sigma_{GNSS/niv}$  GNSS/nivelace

	QGZÚ 2013	AG	AT1	AT2	AT4	AT6	AT8
$\sigma_{GNSS/niv}$	21 mm	16 mm	17 mm	17 mm	17 mm	17 mm	17 mm



**Obr. 6** Rozdíly výškových anomálií mezi AT1 a QGZÚ-2013, mapový podklad ZM ČR 1 : 10 000 [18]

**6. Závěr**

Na základě přímo měřených TO a topografických dat bylo vytvořeno několik variant astro-geodetického a astro-topografického kvazigeoidu v oblasti Dolní Moravy. Vypočtené modely byly porovnány s Podrobným kvazigeoidem QGZÚ-2013 a s GNSS/nivelací. Pro výpočet modelů byla zvolena metoda astro-geodetické, respektive astro-topografické nivelace v kombinaci s vyrovnáním podmínkových měření. Tento postup poskytl aposteriorní směrdatné odchylky měřených astro-geodetických TO, vyrovnaných astro-geodetických TO a vyrovnaných výškových anomálií.

Z porovnání vnitřní přesnosti jednotlivých sítí (**tab. 1**, **tab. 2** a **tab. 3**) je vidět, že přidání topografických TO má příznivý vliv na přesnost výsledného modelu kvazigeoidu. Zlepšení je znatelné při vložení jednoho bodu s interpolovanou astro-geodetickou TO na každou spojnicí – zvýšení vnitřní přesnosti modelu kvazigeoidu o 42 % při poklesu průměrné vzdálenosti mezi body z 600 m na 300 m. Přidávání dalších bodů již nepřineslo výrazné zlepšení, při použití 8 vložených bodů byla vnitřní přesnost modelu zvýšena o 47 %.

Zvýšení vnější přesnosti bylo testováno porovnáním s QGZÚ-2013 a výsledky GNSS/nivelace. Zvýšení přesnosti se nepodařilo prokázat z důvodu nedostatečné přesnosti referenčních dat. Kvalitnější referenční data nejsou bohužel pro danou lokalitu k dispozici.

V pracích [4] a [8] bylo prokázáno zlepšení vnitřní přesnosti modelu kvazigeoidu při použití astro-topografické nivelace. V těchto pracích byl řešen pouze profil kvazigeoidu, nikoliv plošná síť. Pro prokázání přínosu astro-topografické nivelace u plošné sítě by bylo potřeba mít pro tuto oblast zvlášť vypočtený model kvazigeoidu z gravimetrických dat, tak aby tento model nerefletoval regionální trend a byl co nejméně zatížen systematickými vlivy širšího okolí. Případně mít k dispozici na většině astro-geodetických bodů kvalitní data pro GNSS/nivelaci.

Uvedené výsledky naznačují, že použití topografických TO má potenciál zvýšit přesnost AG modelů kvazigeoidu na přesnost, které celorepublikový model QGZÚ-2013 nedosahuje. Metoda je vhodná i pro použití v horských oblastech, nicméně v důsledku své pracnosti je využitelná spíše pro testování přesnosti velkoplošných modelů než pro jejich tvorbu.

**LITERATURA:**

- [1] HELMERT, F. R.: Die mathematischen und physikalischen theorieen der höheren geodäsie. 1880: B. G. Teubner.
- [2] MOLODENSKIJ, M. S.-JEREMEJEV, B. F.-JURKINA, M. I.: Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. 1962, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1962.
- [3] FORSBERG, R.-TSCHERNING, C. C.: The use of height data in gravity field approximation by collocation. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1981. 86(B9): s. 7843-7854.
- [4] HIRT, C.-DENKER, H.-FLURY, J.-LINDAU, A.-SEEBER, G.: Astrogeodetic validation of gravimetric quasigeoid models in the German Alps—first results. 2009.
- [5] VOLAŘÍK, T.-MACHOTKA, R.-KURUC, M.-PUCHRÍK, L.-JURČÍK, J.: Determination of quasigeoid in local network using modern astrogeodetic technologies. Acta Geodynamica Et Geomaterialia, 2013. 10(4): s. 437-442.
- [6] MACHOTKA, R. Automatizace astronomického určování polohy. Brno, 2013. 109 s. Habilitační práce. Vysoké učení technické v Brně.
- [7] HIRT, C.-FLURY, J.: Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. Journal of Geodesy, 2008. 82(4-5): s. 231-248.

- [8] KRATOCHVÍL, R.-MACHOTKA, R.-BUDAY, M.: Use of the topographic deflections of the vertical for computation of the quasigeoid. in Advances and Trends in Geodesy, Cartography and Geoinformatics II: Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Scientific and Professional Conference on Geodesy, Cartography and Geoinformatics (GCG 2019), September 10-13, 2019, Demánovská Dolina, Low Tatras, Slovakia. 2020: CRC Press.
- [9] PAVLIS, N. K.-HOLMES, S. A.-KENYON, S. C.-FACTOR, J. K.: An Earth gravitational model degree 2160: EGM2008. 2008. General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria.
- [10] ČÚZK. Podrobný kvazigeoid QGZÚ-2013. 2013 [cit. 13.06.2019]; Dostupné z: <http://geoportal.cuzk.cz/default.aspx?mode=TextMeta&side=bodpole&metadatalD=CZ-CUZK-QGZU>.
- [11] HOFMANN-WELLENHOF, B.-MORITZ, H.: Physical Geodesy - second edition. 2005, Wien: Springer Wien, p. 403.
- [12] VYKUTIL, J.: Vyšší geodézie. 1981, Praha: Kartografie n. p., 545 s.
- [13] TORGE, W.-MÜLLER, J.: Geodesy - 4th Edition. 2012, Göttingen, Germany: Walter De Gruyter, p. 433.
- [14] MACHOTKA, R.: Určování astronomických souřadnic-metoda párů stejné výšky (Determination of astronomical coordinates-method of couples of equal heights). Geodetický a kartografický obzor, Praha, 51/93, 2005, č. 12, s. 258-264.
- [15] CACOŇ, S.-WEIGEL, J.-ŠVÁBENSKÝ, O.-KONTNY, B.-JAMROZ, O.: Geodynamika Masywu Śnieżnika i ocszarów przyległych, in Masyw Śnieżnika - zmiany w środowisku przyrodniczym. 1996, Polska Agencja Ekologiczna: Warszawa, s. 57-70.
- [16] ŠVÁBENSKÝ, O.-WEIGEL, J.: Výzkumná geodetická síť „Sněžník“. Geodetický a kartografický obzor, Praha, 55/97, 2009, č. 4, s. 69-75.
- [17] PUCHRÍK, L.: Aspekty vyhodnocení měření GNSS. Brno, 2013. 89 s. Dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Školitel Švábenský, O.
- [18] ČÚZK, Základní mapa ČR 1 : 10 000, in Webová Mapová Služba. 2020: Praha.
- [19] JURČÍK, J.: Užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu. Brno. 2012. 75 s. Diplomová práce. VUT v Brně. Vedoucí práce Machotka, R.
- [20] MACHOTKA, R.-KURUC, M.-VOLAŘÍK, T.: Local quasigeoid model creation from astrogeodetic measurements. Studia Geophysica et Geodaetica, 2013. 57(1): pp. 27-46.
- [21] NAGY, D.-PAPP, G.-BENEDEK, J.: The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy, 2000. 74(7-8): pp. 552-560.
- [22] DANIELSON, J. J.-GESCH, D. B.: Global multi-resolution terrain elevation data 2010 (GMTED2010). 2011, U.S. Geological Survey Open-File Report 2011-1073, p. 26.
- [23] NAGY, D.: The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics, 1966. 31(2): pp. 362-371.
- [24] HECK, B.-SEITZ, K.: A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. Journal of Geodesy, 2007. 81(2): pp. 121-136.
- [25] NAGY, D.-PAPP, G.-BENEDEK, J.: Erratum: corrections to: „The gravitational potential and its derivatives for the prism“. Journal of Geodesy, 2002. 76(8): pp. 475-475.
- [26] SOMIGLIANA, C.: Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione. MmSAI, 1929. 4: s. 425.

Do redakce došlo: 22. 7. 2021

**Lektoroval:**  
**Ing. Juraj Papčo, PhD.,**  
**Slovenská technická univerzita v Bratislave,**  
**Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky**