Ellipsa – speciální případ křivky vejcové – zajímavé křivky profesora Marka

**Doc. Ing. Josef Weigel, CSc.,
Ústav geodézie,
Fakulta stavební VUT v Brně**

Abstrakt

Profesor Jan Marek se řadí k významným českým geodetům druhé poloviny 19. století. Velkou část svého života působil jako triangulátor převážně v uherské části monarchie. Poté nastoupil jako profesor matematiky a geodézie na Tereziánské vojenské akademii ve Vídeňském Novém Městě. Příspěvek vychází z jeho rukopisných textů, které se dochovaly na Ústavu geodézie VUT v Brně. První část rukopisu psaná německy, obsahuje jeho přípravu na přednášky z vyšší matematiky. Druhá část zřejmě vznikla až po jeho odchodu do důchodu a návratu do Čech. Z této části jsou převzaty velmi zajímavé křivky, včetně jejich podrobného matematického zdůvodnění. Detailně jsou ukázány dvě z nich, a to křivka vejcová a křivka pecnová. Dokazují, že profesor Marek byl nejen skvělý matematik, ale i velký milovník přírody.

Ellipse – a Special Case of the Egg Curve – Interesting Curves of Professor Marek

Abstract

Professor Jan Marek is one of the most important Czech surveyors of the second half of the 19th century. For a large part of his life, he worked as a triangulator mainly in the Hungarian part of the monarchy. He then joined the Military Academy in Vienna's New Town as a professor of mathematics and geodesy. The paper originates from his manuscript texts, which have been preserved at the Institute of Geodesy of the Brno University of Technology. The first part, written in German, is his preparation for lectures in higher mathematics. The second part, already written in Czech, was written after his retirement and return to Bohemia. Very interesting curves are taken from this part, including their detailed mathematical justification. Two of them are shown in detail, namely the egg curve and the cob-loaf curve. They prove that professor Marek was not only a great mathematician, but also a great lover of nature.

Keywords: *geodesy, triangulation, ellipse, egg curve, cob-loaf curve, Prof. J. Marek*

1. Úvod

Elipsa patří k základním křivkám rovinné geometrie. Její definici, matematické vyjádření i grafickou konstrukci se učí studenti podrobně již na středních školách. Profesor Marek se matematice a zejména jejím praktickým aplikacím věnoval po celý svůj život. Vybral si povolání, které má k matematice velice blízko, a sice povolání geometra – neboli zeměměřiče. Mnoho let byl triangulátorem při nově budovaných trigonometrických sítích v rakousko-uherské monarchii. Během této činnosti nejen měřil a počítal náročné geodetické úlohy, ale též rozvíjel technologie těchto měření a jejich výpočtů. Některá nově navržená matematická řešení publikoval v nejprestižnějším odborném časopisu té doby – *Zeitchrift für Vermessungswesen*. Pro své mimořádné odborné znalosti, praktické zkušenosti i jazykové schopnosti byl po 20 letech jmenován profesorem na Tereziánské vojenské akademii ve Vídeňském Novém Městě, kde přednášel především matematiku a geodézii, ale též např. astronomii. Po svém penzionování a návratu do Čech se matematikou i nadále zájmově zabýval. Svědčí o tom jeho rukou psané texty, které se dochovaly na Ústavu geodézie Vysokého učení technického v Brně (VUT) v pozůstalosti po profesoru Semerádovi.

První část rukopisu v rozsahu asi 90 stran tvoří jeho písemná příprava přednášek ze základů vyšší matematiky pro studenty akademie. Tato část rukopisu je psána německy. Ve druhé části svého rukopisu se věnuje odvozením a definicím různých křivek, které mají velmi blízko k přírodě. Jedná se o např. o křivky vejcové, pecnové, listové, hruškové a další. Tato část rukopisu, která je již psána česky, s velkou pravděpodobností vznikala až po jeho odchodu do výslužby, a svědčí o tom, že jej matematika i v tomto období stále zajímala a zřejmě i bavila. Obsahuje odvození řady vzorců, kresby grafů, výpočty i různé poznámky a má obdobný rozsah jako první část rukopisu.

Článek se zabývá konstrukcí a odvozením křivky vejcové. Dokazuje, že elipsa je jen speciální případ křivky, kterou prof. Marek nazývá pro její tvar křivkou vejcovou. Jednoduchá záměna parametrů této křivky vede ke křivce, kterou pro její tvar a podobu připomínající pecen chleba, nazval křivkou pecenovou či pecnovou. Příspěvek z velké části kopíruje rukopis Markova odvození těchto křivek. Není vyloučeno, že se jedná o první publikování těchto křivek, které byly vytvořeny přibližně před 130-140 lety. Dokazují, že elipsa je skutečně jen speciálním případem uvedených křivek.

2. Profesor Jan Marek – stručný životopis

Jan Marek se narodil 8. 6. 1834 v Janovicích u Polné v rodině vesnického učitele. Postupně studoval na základních školách v Polné, Janovicích a v Telči. Již při tomto studiu se projevoval tím, že miloval počty, geometrii a rýsování. Po skončení školy dva roky pracoval jako písař na úřadě v Polné. Následně absolvuje přípravný kurz na vídeňskou techniku a po jeho absolvování s vyznamenáním je přímo přijat do II. ročníku. Vídeňskou techniku vystudoval v roce 1854 s „vyznamenáním prvé třídy“ (fyzika, vyšší matematika, mechanika, konstruktivně-strojnické kreslení, strojnictví, nivelování, vyšší geodesie, praktická geometrie). Svoji kariéru zeměměřiče začíná na haličském finančním ředitelství a již po dvou letech je přeřazen k triangulacím do Šopronĕ a následně v roce 1857 do triangulační a výpočetní kanceláře ve Vídni. Pod vedením Ing. Františka Horského se podílí na triangulacích II. a III. řádu zejména v župách Zvolenské, Novohradské, Spišské, Liptovské i jiných. Při pobytu ve Vídni pokračuje v mimořádném studiu matematiky a astronomie. Rovněž se věnuje intenzivně studiu cizích jazyků. Dále pracuje jako samostatný triangulátor a v roce 1867 je jmenován přednostou Triangulační a výpočetní kanceláře ministerstva financí v Budíně (-Pešti). Odborně publikuje a do evropské odborné veřejnosti pronikla zejména jeho *Markova úloha* pro řešení dvojbodu.

V roce 1874 je říšským ministerstvem války povolán na Vojenskou (tereziánskou) akademii do Vídeňského Nového Města, kde působí jako profesor vyšší geodézie, vyšší matematiky a sférické astronomie. Někdy v tomto období patrně vzniká první část jeho rukopisu – přednášky z vyšší matematiky. Definitivním řádným profesorem pro vyšší matematiku, geodézii a praktické měřictví je jmenován v roce 1880. Mimo výuku byl rovněž pověřován dalšími povinnostmi. V roce 1885 je např. jmenován členem komise pro zřízení vídeňského vodovodu. V důsledku zhoršených vztahů mezi Rakouskem a Ruskem a pro své výborné jazykové znalosti je v roce 1887 pověřen výukou ruštiny pro důstojníky posádky Vídeňského Nového Města. Studiu cizích jazyků se nadále věnuje a ovládá 7 jazyků úplně, 4 částečně a dobré vědomosti má i v perštině/arabštině. Má četné odborné kontakty a nadále publikuje. V roce 1889, jako člen komise pro mezinárodní metr, podepisuje za Rakousko listinu o deponování tohoto etalonu. Za svoji činnost též obdržel řád císaře Františka Josefa I.

V roce 1889 odchází prof. Marek do výslužby, ale matematice se věnuje i nadále. Zatímco první část jeho rukopisu „Přednášky o Vyšší matematice" vznikla patrně během jeho působení na vojenské akademii, tj. po roce 1874, druhá část vznikla asi až po jeho odchodu do výslužby. Dokládá to i poznámka na jedné straně rukopisu, která odkazuje na školní rok 1894/95. Obdobně lze z další poznámky odvodit rok 1890, kdy byla do textu vepsána.

Česká odborná veřejnost se podrobněji s odbornou činností profesora Marka, jeho mapami a publikacemi seznámila zejména na jubilejní zemské výstavě v Praze v roce 1891. Rovněž na výstavě Spolku inženýrů a architektů v roce 1893 zaujímaly jeho práce takřka celé oddělení. Profesor Marek zemřel po delší nemoci dne 9. 7. 1900 v Praze. Podrobnější informace k jeho životopisu lze získat z publikací [1], [2], [3], resp. [4].

Odborná veřejnost byla o Markově rukopisu informována na sympoziu z dějin Geodézie a kartografie, které se konalo v Národním technickém muzeu v Praze v listopadu 2022, kde byly předneseny ukázky z tohoto rukopisu patrně poprvé veřejně prezentovány. Podrobnější informace bude možno získat až z připravované publikace ke konferenci [5].

3. Křivka vejcová a křivka pecnová

V této části je uvedeno odvození křivky vejcové, tak jak je v rukopisu popsal profesor Marek. Ukázka příslušné strany rukopisu týkající se odvození křivky vejcové je na **obr. 3**. I když je text rukopisu poměrně dobře čitelný, přesto je dále uveden jeho přepis fontem, který se pokouší napodobit rukopis autorův. Protože text rukopisu obsahuje symboly a vzorce psané rukou, tak aby nedocházelo k jejich záměně s textem, byly tyto vzorce napsány ve Wordu jako rovnice. Pro jejich lepší odlišení od vlastního textu byly ještě zvýrazněny tučným písmem. Předložený přepis několika stran rukopisu se týká odvození křivky vejcové a úvodní části ke křivce pecnové, autorem též nazývané pecenové.

Uvedený text rukopisu je pokusem přepsat jej tak, jak byl skutečně autorem napsán, tj. včetně všech výrazů a případných „gramatických a jiných nepřesností". Text tak umožňuje porovnat češtinu i odbornou terminologii druhé poloviny 19. století. K vlastnímu přepisu rukopisu je nutno ještě dodat, že se nejedná o přesnou kopii rukopisu, neboť není přesně dodržováno členění řádků a odstavců. Rovněž vpisky do vzorců byly již doplněny tak, aby vzorce byly souvislé. Použitý matematický aparát rovněž nedodržuje stejnou velikost použitých symbolů, což snad nebude na závadu při jejich případném studiu.

V první části je připomenuta konstrukce elipsy s návazností na konstrukci křivky pecnové, v druhé části je stručně uvedena hlavní myšlenka tvorby křivky vejcové, a ve třetí části je přepis několika málo stran rukopisu týkajících se těchto křivek.

3.1 Konstrukce elipsy

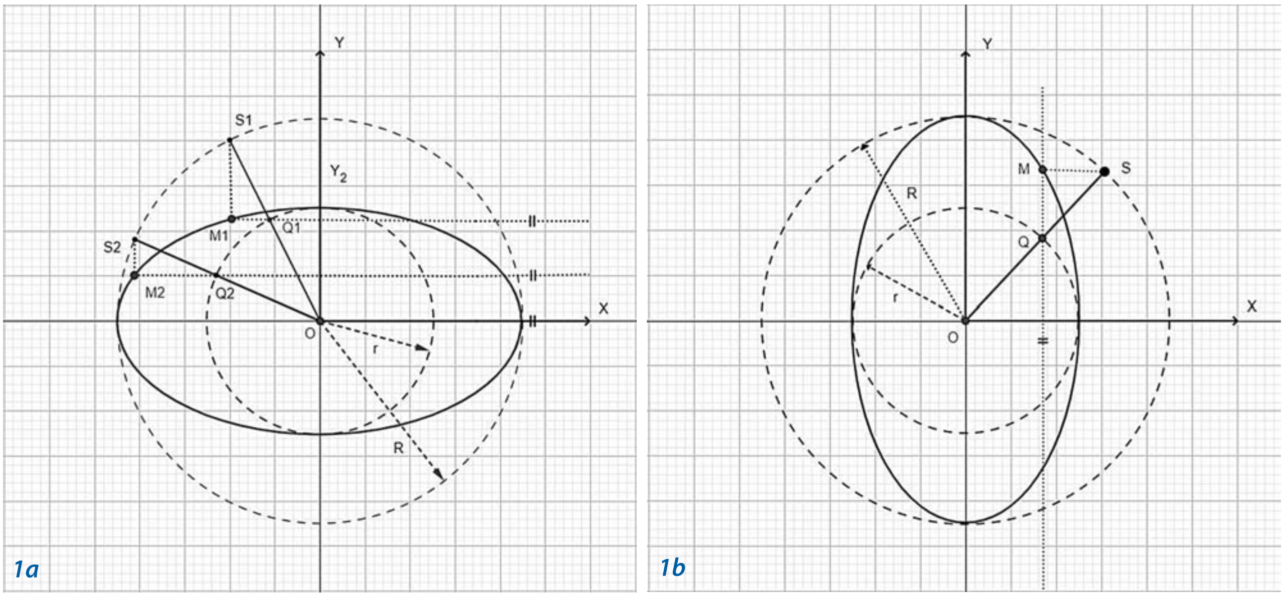
Jednou z nejčastěji realizovaných konstrukcí elipsy je tzv. trojúhelníková konstrukce. Tato klasická konstrukce elipsy je dobře známa, proto bude uvedena jen stručně bez dalších matematických zdůvodnění a také jen v grafické podobě. Na **obr. 1** je zvolen bod **O** jako počátek pravoúhlé souřadnicové soustavy s osami **X** a **Y**. Dále jsou nakresleny dvě soustředné kružnice se středem v bodě **O**. Menší kružnice je zadána poloměrem **r**, větší kružnice poloměrem **R**. Větší poloměr **R** vyjadřuje velikost velké poloosy elipsy, obvykle nazývanou hlavní poloosou, a hodnota **r** je tedy délka vedlejší poloosy.

Vedeme-li nyní libovolným směrem průvodič z bodu **O**, protne tento obě kružnice v bodech **Q1** a **S1**. Dále vedeme bodem **Q1** rovnoběžku s osou **X** a z bodu **S1** na ni spustíme kolmici. Průsečík této rovnoběžky s kolmicí bude bodem elipsy a je označen jako bod **M1**. Postupně tak můžeme vykreslit další body elipsy – na **obr. 1a** je ještě znázorněna konstrukce druhého bodu **M2**. Vykreslení jednotlivých bodů elipsy si též můžeme představit jako postupně se posouvající pravoúhlý trojúhelník **QMS**, s pravým úhlem v bodě **M**.

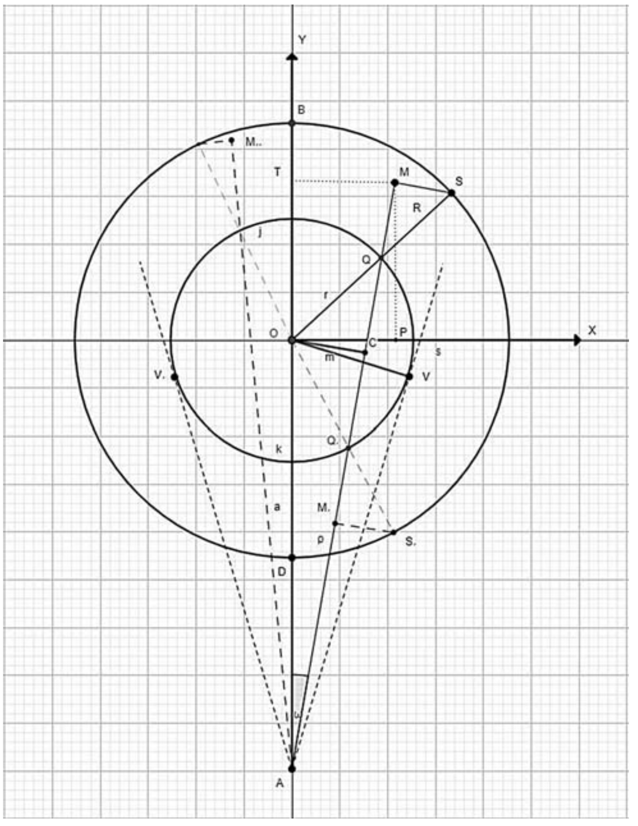
Záměnou rovnoběžky a kolmice získáme elipsu v příčné poloze tj., jako bychom vzájemně zaměnili obě její poloosy. Na **obr. 1b** je tentokrát nakreslena rovnoběžka s osou **Y** vedená bodem **Q** a kolmice na ni je opět spuštěna z bodu **S**. Konstrukční pravoúhlý trojúhelník je tedy opět tvořen body **QMS**. Orientace této elipsy a označení bodů bylo zvoleno ve shodě s dále popisovanou konstrukcí křivky vejcové.

3.2 Konstrukce křivky vejcové

Zde je stručně popsán postup při konstrukci křivky vejcové, viz **obr. 2**. Nakresleme opět dvě soustředné kružnice o poloměrech **R** a **r**, kde **R** označuje větší poloměr. Ve vhodné vzdálenosti od středu kružnic **O** zvolíme na jedné z os bod **A**, vzdálený od jejich středu o hodnotu **a** › **R**.



Obr. 1 Trojúhelníková konstrukce elipsy v základní (1a) a v příčné poloze (1b)



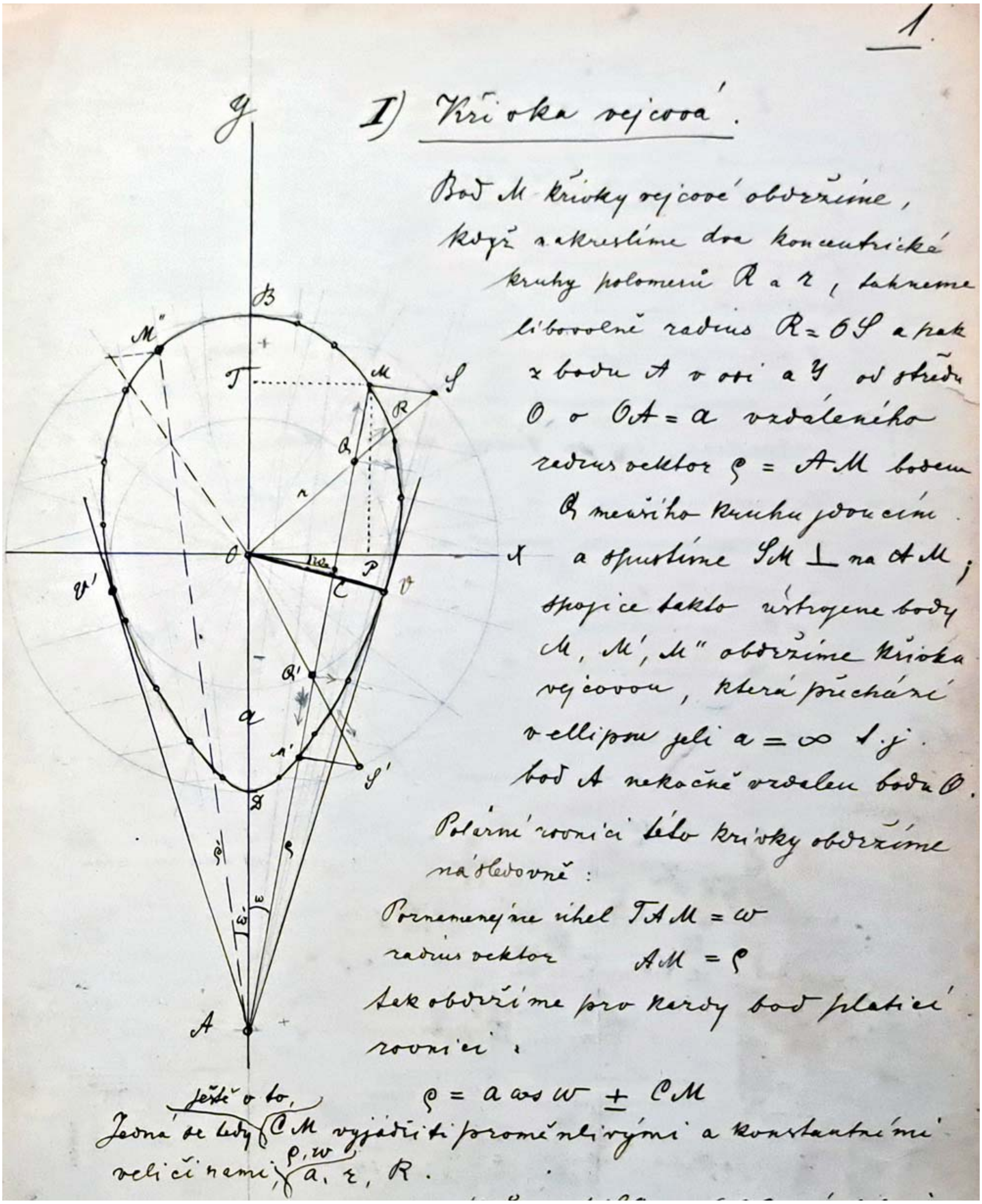
Obr. 2 Konstrukce bodů křivky vejcové

Vedeme-li ze středu **O** polopřímku, protne tato obě kružnice v bodech **Q** a **S**. Body **A** a **Q** proložíme přímku **g** a z bodu **S** na ni spustíme kolmici **h**. Průsečík přímek **g** a **h** je bodem **M** hledané křivky, kterou prof. Marek nazval křivkou vejcovou. Pro hodnotu **a** → ∞ přejde křivka vejcová v elipsu o velikosti poloos **R** a **r**. Konstrukce křivky vejcové se od konstrukce elipsy liší tedy tím, že rovnoběžka s osou **Y** je nahrazena přímkou s počátkem v bodě **A** a jdoucí bodem **Q** příslušného průvodiče. Elipsa vznikne, až když se bod **A** posune na zvolené ose do nekonečna.

Na **obr. 2** je překreslena konstrukce křivky vejcové podle obrázku v rukopisu prof. Marka. Příslušná část rukopisu s touto křivkou je na **obr. 3**.

3.3 Křivka vejcová v rukopisu prof. Marka

V této stati je uveden přepis několika stran rukopisu, které popisují křivku vejcovou. Pro lepší orientaci v přepisu textu byl obrázek křivky vejcové z originálu rukopisu částeč-


1.

I) Křivka vejcová.

Bod M křivky vejcové obdržíme, když zakreslíme dva koncentrické kruhy poloměrů R a r, taknemě libovolně radius R = OS a pak z bodu A v osi a Y od středu O o OA = a vzdáleného radius vektor ρ = AM bodem Q menšího kruhu jdoucím. a spustíme SM ⊥ na AM; spojíce takto ustrojené body M, M′, M″ obdržíme křivku vejcovou, která přechází v ellipsu jeli a = ∞ t.j. bod A nekonečně vzdálen bodu O.

Polární rovnici této křivky obdržíme následovně:

Poznamenejme úhel TAM = ω
radius vektor AM = ρ
tak obdržíme pro každý bod platící rovnici:

ρ = a cos ω ± CM

Jedná se tedy ještě o to, CM vyjádřiti proměnlivými a konstantními veličinami ρ, ω, a, r, R.

Obr. 3 Úvodní část rukopisu ke křivce vejcové

ně překreslen – viz **obr. 2**, a to se snahou o zachování původní symboliky.

Konstrukce křivky vejcové je zřejmá z originálu textu. Body **M´** a **M´´** v originále jsou na **obr. 2** označeny **M,** a **M,,**. Ve shodě s rukopisem je jeho přepis psán šikmým písmem. Tento obrázek slouží pro snazší orientaci v autorově textu a zejména pro orientaci ve vzorcích v přepisu tohoto rukopisu. Pro lepší odlišení od vlastního textu jsou symboly a vzorce psány zvýrazněným písmem. Ne vždy bylo možno dodržet v **obr. 2** přesné značení i umístění některých symbolů.

Na následujících několika stranách je uveden přepis originálu textu. Kopie z originálu těchto stran nejsou již ukázány, neboť by to neúměrně rozšířilo rozsah tohoto článku.

Křivka vejcová.

Bod M křivky vejcové obdržíme, když nakreslíme dva koncentrické kruhy polomerů R a r, tahneme libovolně radius $R = OS$ a pak z bodu A v osi a y od středu O o $OA = a$ vzdáleného radius vektor $\rho = AM$ bodem Q menšího kruhu jdoucím a spustíme $SM \perp$ na AM; spojice takto ustrojene body M, M', M'' obdržíme křivku vejcovou, která přechází v ellipsu jeli $a = \infty$ t.j. bod A nekočně vzdalen bodu O. Polární rovnici této křivky obdržíme následovně:

Poznamenejme úhel $TAM = \omega$
radius vektor $AM = \rho$
tak obdržíme pro kazdy bod platicí rovnici:

$\rho = a \cos \omega \pm CM$

Jedná se tedy ještě o to, CM vyjádřiti proměnlivými a konstantními veličinami, ρ, ω, a, r, R.

Z podobnosti trojuhelníků $\Delta MSQ \backsim OQC$ následuje:

$QC : QM = r : R - r$ aneb $QC : QC + QM = r : R$ t.j.
$QC : CM = r : R$, z čehož vyplívá $QC = CM \frac{r}{R}$ a jelikož
$QC = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega}$, bude $CM = \frac{R}{r} \cdot \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega}$ a rovnice křivky této zní:

$$1) \quad \rho = a \cos\omega \pm \frac{R}{r} \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega}$$

kdež negativní znamenko platí pro spodní bod M', neboť jest se lehko přesvědčiti z podoby trojúhelníků OCQ' a $Q'M'S'$, že i délka $CM' = CM = \frac{R}{r} \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega}$ Z rovnice této vidíme, že pro

$r = a \sin\omega$ obdržíme jen jednu hodnotu pro ρ a sice: $\rho = a \cos \omega$ a jelikož $\cos(+\omega) = \cos(-\omega)$ máme na obou stranách dvě stejné hodnoty $\rho = a \cos \omega$ a $\rho = a \cos(-\omega)$ v 2 bodech V a V', kde jsou oba vektory sobě rovné a dotýkají se křivky;

Zároveň víme, že pro všechny reelné hodnoty uhlu ω jest $\sin\omega < \frac{r}{a}$ a že vyšší hodnoty nad $\sin\omega = \frac{r}{a}$ pro ω postaviti nemůžeme; pro $\omega = 0$ jest $\rho = a \pm R$ což naznačuje body B a D.

Abychom též seznali rovnici v pravouhenlých souřadnicích, jichž počatek v bodu $O \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ postavíme:

$M \begin{cases} x = \rho \sin\omega = MT \\ y = \rho \cos \omega - a = MP \end{cases}$ pak obdržíme součet druhych mocností:

$x^2 + y^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos\omega$ a z toho
$\rho = a \cos \omega \pm \sqrt{x^2 + y^2 - a^2 \sin^2 \omega}$ *)

V porovnání s rovnici 1) máme:

$\frac{R}{r} \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega} = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2 \sin^2 \omega}$ a jelikož $\sin^2 \omega = \frac{x^2}{x^2 + (a + y)^2}$, máme nahrazením v rovnici této

---

*) $\sphericalangle XOV = OAV = \omega_o = 90 - \sphericalangle AOV$

$$R^2\left(r^2-\frac{a^2x^2}{x^2+(a+y)^2}\right)=r^2\left(x^2+y^2-\frac{a^2x^2}{x^2+(a+y)^2}\right)$$ aneb

2) $r^2(x^2+y^2)+\dfrac{(R^2-r^2)\,a^2x^2}{x^2+(a+y)^2}=R^2r^2$ rovnici křivky vejcové *)

pro $x=0$ bude $r^2y^2+0=R^2r^2$ tedy $y=\pm R$ což naznačuje prostřední nejvyšší a nejnižší bod.

Pro $y=0$ jest $r^2x^2+\dfrac{(R^2-r^2)\,a^2x^2}{x^2+a^2}=R^2r^2$ a z toho

α) $x^2=-\dfrac{R^2}{2r^2}(a^2-r^2)\pm\sqrt{R^2a^2+\dfrac{R^4}{4r^4}(a^2-r^2)^2}$

$$x=\pm\sqrt{-\frac{R^2}{2r^2}(a^2-r^2)+\frac{R}{2r^2}\sqrt{4r^4a^2+R^2(a^2-r^2)^2}}$$

to jsou 2 body kde osa úseček křivku protíná.

Jelikož vzdycky $\sqrt{R^2a^2+\dfrac{R^4}{4r^4}(a^2-r^2)^2}>\dfrac{R^2}{2r^2}(a^2-r^2)^2$ byti musí, třeba nám bráti při vypočítávaní x jen pozitivní hodnotu v $2^{hé}$ odmocnině ve vzorci α), jinak by negativní davala jen hodnoty imaginárné.

V bodu V, kde se dotýká $\rho=a\cos\omega_o$ křivky obdržíme, jelikož OV s osou úseček tvoří souřadnice bodu

$$V\begin{cases}x=r\cos\omega_o\\ y=-r\sin\omega_o=-r\cos AOV\end{cases},$$

a vsazení těchto hodnot do rovnice 2hé objeví se nám identická rovnice, což naznačuje, že bod tento v křivce II skutečně leží.

Máme totiž

$$r^2\cancel{r^2}+\frac{(R^2-r^2)\,a^2\cos^2\omega}{r^2\cos^2\omega+(a-r\sin\omega)^2}=R^2\cancel{r^2}$$

$$r^2+\frac{(R^2-r^2)\,\rho^2}{r^2+a^2-2ar\sin\omega}=R^2$$

a poněvadž dle Carnotové věty

$=r^2+a^2-2ar\cos AOV=\rho^2=r^2+a^2-2ar\sin\omega$ jest též k

$r^2+\dfrac{(R^2-\cancel{r^2})\cancel{\rho^2}}{\cancel{\rho^2}}=R^2$ skutečně identická rovnice.

Vyhledejme plochu vejcové křivky v souřadnicích polarních dle rovnice 1)

Výpočet plochy provede se dle znamého vzorce

β) $P=1/2\int\rho^2\,d\omega$; chcemeli zde polovinu plochy $BVDV'B$ pomocí integralního počtu vyhledati, třeba nám zavést hodnoty pro ρ_1 a ρ_2 z rovnice I) do rovnice β), totiž :

*) $\sphericalangle XOV=OAV=\omega_o=90-\sphericalangle AOV$

$\rho_1 = a \cos\omega + \frac{R}{r} \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\omega}$ v horním dílu křivky od **B** až do **V**

$\rho_2 = a \cos\omega - \frac{R}{r} \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\omega}$ v dolním dílu křivky od **V** až do **D**

pak obdžíme, postavímeli poloplochu $BVD = p = \frac{P_0}{2}$

$$p = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_0} \rho_1^2 \, d\omega + \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{0} \rho_2^2 \, d\omega = \frac{1}{2} \{\int_0^{\omega_0} \rho_1^2 \, d\omega - \int_0^{\omega_0} \rho_2^2 \, d\omega\}$$

$$\gamma) \quad p = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_0} (\rho_1^2 - \rho_2^2) d\omega$$

Jelikož se v rozdílu $(\rho_1^2 - \rho_2^2)$ $a^2 \cos^2\omega$ a $\frac{R^2}{r^2} (r^2 - a^2 \sin^2\omega)$ ruší, obdržíme jednoduše rozdil :

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = 4 \frac{R}{r} a \cos\omega \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2\omega}$$ a plochu dle γ)

$$p = 2Ra \int_0^{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2\omega}{r^2}} \cdot d\sin\omega$$ aneb

δ) celou plochu vejcové křivky

$$2p = P_0 = 4R\cancel{a} \int_0^{\omega_0} \sqrt{1 - \left(\frac{a \sin\omega}{r}\right)^2} \cdot d\left(\frac{a \sin\omega}{r}\right) \frac{r}{\cancel{a}}$$

Integrale druhu tohoto dají se provesti rozložením, mámeť :

$$\int \sqrt{1 - x^2} \cdot dx = \int \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{1}{2} \{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\}$$

tedy předložené integral δ

$$P_0 = 4Rr \int_0^{\omega_0} \sqrt{1 - \left(\frac{a \sin\omega}{r}\right)^2} \cdot d \frac{a \sin\omega}{r} = 4Rr \frac{1}{2} \left\{\frac{a \sin\omega}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{a \sin\omega}{r}\right)^2} + \arcsin x \omega_0\right\}$$

a určením jeho v mezech $\omega = 0$ až $\omega = \omega_0$ obsah celé plochy

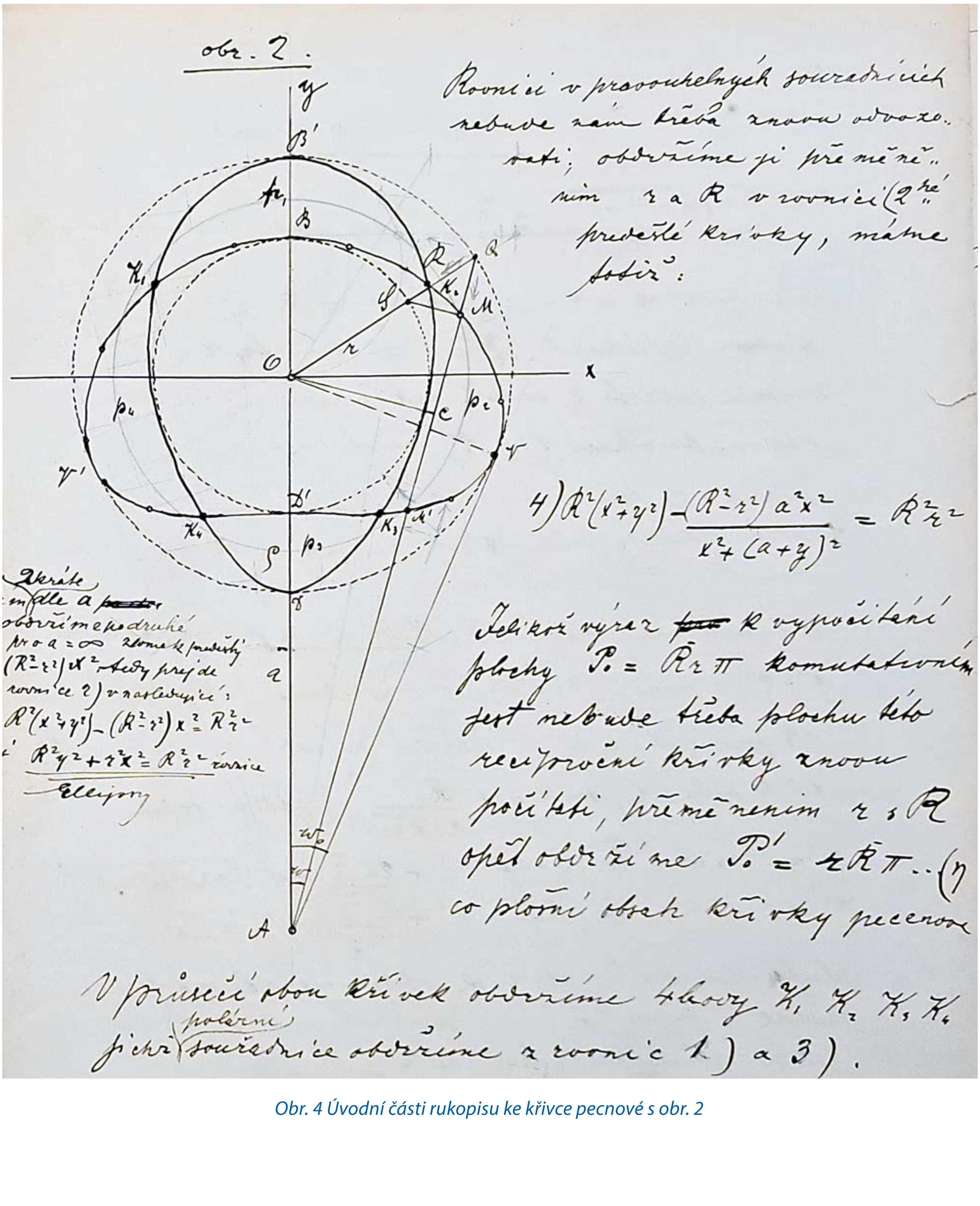
$$\epsilon) \quad P_0 = 2Rr \left\{\frac{\pi}{2} - 0\right\} = \cancel{2}Rr \frac{\pi}{\cancel{2}}$$

Plocha křivky vejcové rovná se ploše kruhu zařízenému poloměrem $x = \sqrt{Rr}$, jehož délka x jest stredni úměrou obou polomerů r a R ; z čehož vidíme že plocha P_0 jest zcela neodvislou od vzdálenosti $OA = a$ t.j. dokud R a r se nezmění, zustává i plocha P_0 vždy tatáž, při rostoucím a stavá se špička křivky vždy okrouhlejší, až konečně pro $a = \infty$ v ellipsu přechází, o čemž se též vypočítáním hodnoty zlomku $\frac{(R^2 - r^2) a^2 x^2}{x^2 - 4(a + y)^2}$ pro $a = \infty$ přesvědciti můžeme ; differencováním 2kráte dle a obdržíme podruhé pro $a = \infty$ zlomek předešlý $= (R^2 - r^2) x^2$ tedy prejde rovnice 2) v následující : $R^2 (x^2 + y^2) - (R^2 - r^2) x^2 = R^2 r^2$ t.j

$R^2y^2 + r^2x^2 = R^2r^2$ rovnice ellipsy, v kterémž jsou jak známo plocha ellipsy s osami R a r opět jest $P_0 = Rr\pi$ jak dříve.

Ellipsa jest tedy jen specielní případ křivky vejcové.

Křivka pecenová.



Obr. 4 Úvodní části rukopisu ke křivce pecnové s obr. 2

Přeměnímeli vzájemně v křivce vejcové body S a Q a nakreslíme podobně bod M jako dříve, obdržíme křivku reciproční $BMVD$ s podobnými vlastnostmi jak dříve.

Rovnice křivky této bude, jak z obrazce 2) vysvítá

$\rho = a\cos\omega \pm CM$ a jelikož

$CQ : MQ = R : R - r$

máme $CM = CQ\,\dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{R}\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2\omega}$.

$CQ : CQ - MQ = R : r$

bude tedy definitivně

$$3)\quad \rho = a\cos\omega \pm \frac{r}{R}\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2\omega}$$

v niž R a r svá místa vzájemně přeměnili a proto tuto křivku vztahem k předešlé také reciproční nazvati můžeme, a poněvádž má podobu k vertikalnímu průmětu pecenu chleba též pecenovou nazvati můžeme. **Obr. 2**.

Rovnici v pravouhelných souřadnících nebude nám třeba znovu odvozovati; obdržíme ji přeměněnim r a R v rovnici 2hé předešlé křivky, máme totiž:

$$4)\quad R^2(x^2 + y^2) - \frac{(R^2 - r^2)a^2x^2}{x^2 + (a + y)^2} = R^2r^2$$

Jelikož výraz k vypočitání plochy $P_0 = Rr\pi$ komutativním jest nebude třeba plochu této reciproční křivky znovu počítači, přeměnenim r a R opět obdržíme

$P_0' = rR\pi$ ... (η) což plošní obsah křivky pecenové.

V průseči obou křivek obdržíme 4 body K_1 K_2 K_3 K_4 jichž polární souřadnice obdržíme z rovnic 1) a 3).

Konec přepisu části rukopisu k těmto křivkám.

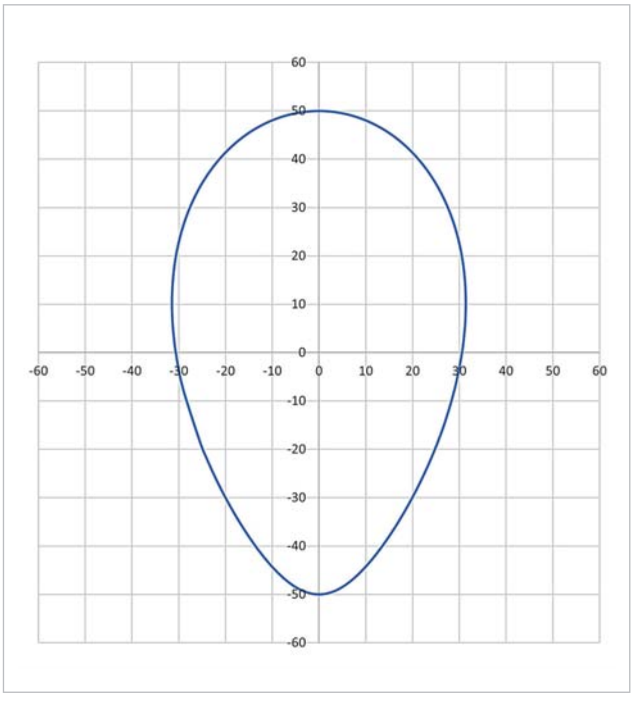
Křivka vejcová (**obr. 3**) byla v rukopisu přímo konstruována. Z tohoto originálu bylo možno odměřit parametry této křivky: R = 50 mm, r = 30 mm, a = 105 mm. Křivka pak byla vykreslena v Excelu – viz **obr. 5**. Obdobně z originálu – (viz **obr. 4**) byly odměřeny parametry, které jsou nyní ale společné pro obě křivky: R = 50 mm, r = 30 mm, a = 120 mm a tyto rovněž vykresleny v Excelu – **obr. 6**.

Rukopis pokračuje odvozením dalších vztahů týkajících se obou křivek, např. jak se mění tvar křivek, když se změní jejich parametry, jak měnit parametry, aby obsah plochy měl zadanou velikost atd. Některé křivky jsou v textu rukopisu přímo konstruovány. Rovněž jsou tam vytvářeny křivky, které vznikají kombinací více křivek. V jedné části rukopisu je nastíněn i pokus o fyzikální pojetí dané problematiky.

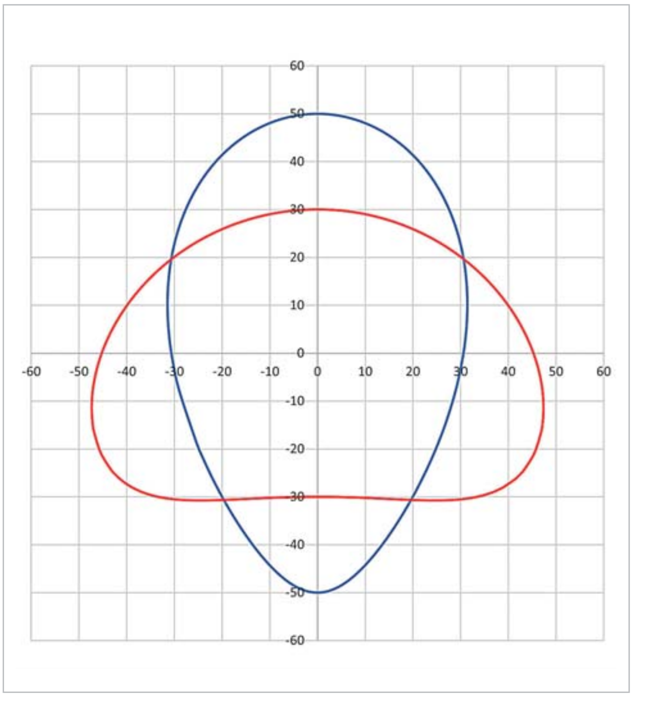
4. Některé další křivky profesora Marka

Pro ilustraci různých křivek v této části rukopisu jsou kopie několika jeho stran ukázány na následujících **obr. 7**, **8** a **9**. V rukopisu kromě křivky vejcové a pecnové jsou řešeny a nakresleny zejména křivky hruškové, listové a jiné. Svědčí o autorově velmi silném vztahu k přírodě. Snažil se parametry některých křivek volit tak, aby se co nejvíce přibližovaly reálným objektům. Patrné je to např. u křivky hruškové – **obr. 7**. Jsou také dokladem, že se jejich tvorbě a odvození profesor Marek věnoval skutečně podrobně.

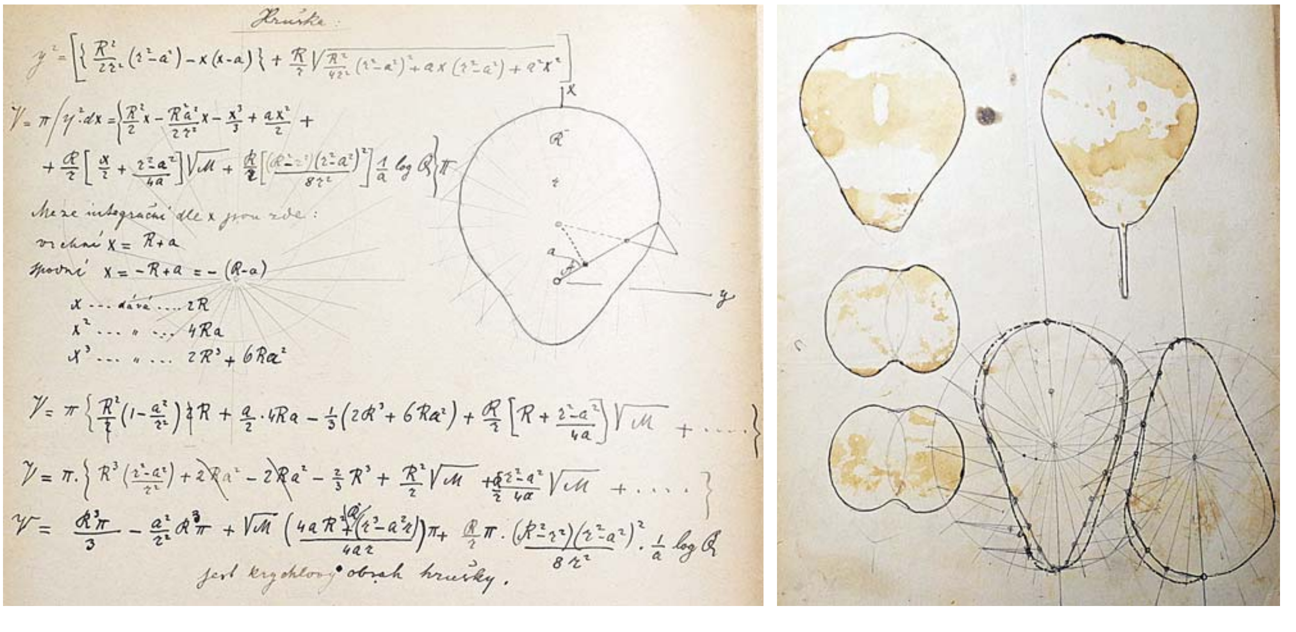
Jak již bylo uvedeno, má česká část rukopisu rozsah asi 90 stran. Na řadě z nich jsou prováděny přímo výpočty nebo dílčí odvození, které jsou často opravovány, škrtány a znovu přepisovány. Tyto strany (až na výjimku u křivky



Obr. 5 Křivka vejcová



Obr. 6 Křivka vejcová a křivka pecnová



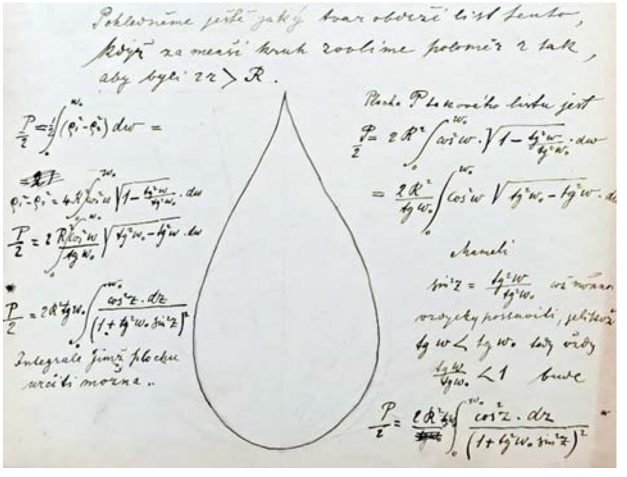
Obr. 7 Křivky hrušky

vejcové) nejsou číslovány a jsou zřejmě i různě přeházeny. Jejich seřazení by vyžadovalo podrobnější studium navazujících rovnic i s tím rizikem, že text této části rukopisu patrně nevznikal systematicky. V několika případech jsou do textu vepsány poznámky a v jednom případě je vepsán i autorův podpis.

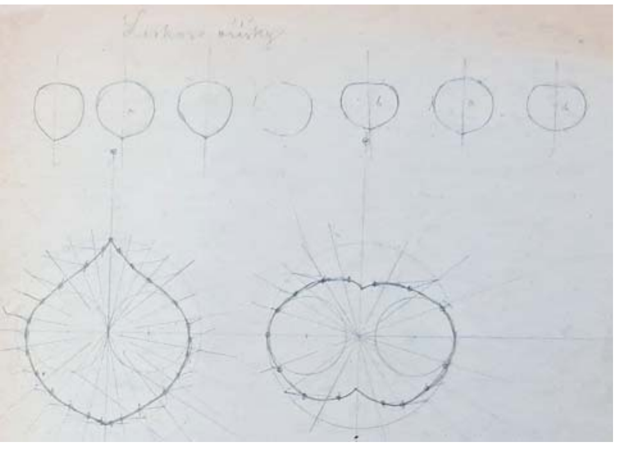
Jistě by bylo zajímavé publikovat kompletní rukopis, a to nejen druhou část, která se týká uvedených křivek, ale i první část rukopisu, která má také asi 90 stran a kde, jak již bylo uvedeno, je jeho písemná příprava přednášek úvodních pasáží z vyšší matematiky. Tento text může být zajímavým dokladem toho, co studentům bylo skutečně z matematiky přednášeno v době před bezmála 150 roky.

5. Závěr

Hlavním cílem příspěvku bylo seznámit odbornou veřejnost s těmito zajímavými křivkami, které zřejmě nebyly dosud publikovány a mohly by sehrát svoji roli i v pedagogice, neboť jsou tam snadno využitelné. Obě křivky by se tak mohly stát zajímavým rozšířením výuky např. des-



Obr. 8 Křivka listová



Obr. 9 Lískové oříšky

kriptivní geometrie či matematiky. Jak blízko tyto křivky odpovídají skutečnosti, je jistě zajímavá výzva pro četné zájemce. Je známo, že např. konstrukcím tvaru vejce je na internetu věnována také pozornost, zatím bez výraznějšího matematického základu. V případě jejich dalšího odborného či pedagogického využití je navrhuji obecně nazývat křivky profesora Marka, zkráceně *Markovy křivky*.

LITERATURA:

[1] Životopis Jana Marka, Zeměměřičský věstník 1927, č. 11, Spolek Čs. zeměměřičů, str. 200-203, dokončení č. 12, s. 215-218.
[2] POUR, B.: Jan Marek: Triumf techniky, Praha, 1928, Borský a Šulc, s. 148-151.
[3] HÁNEK, P.: Čeští zeměměřiči 20. století, Praha, 2004, Český svaz geodetů a kartografů, 241 s.
[4] HÁNEK, P.: Prof. Jan Marek, https://geo.fsv.cvut.cz/gwiki/Prof._Jan_Marek, [2023-01-27].
[5] WEIGEL, J.: Profesor Jan Marek: Triangulátor a matematik, 2023, sborník Rozpravy NTM v Praze – Z dějin geodézie a kartografie, v tisku.

Do redakce došlo: 7. 9. 2023

Lektoroval:
doc. Ing. Pavel Hánek, CSc.,
ČVUT v Praze