

## Implementace a testování softwarové knihovny pro výpočet efektů vzdálené zóny u sférických integrálních transformací

Bc. Jiří Belinger, doc. Ing. Michal Šprlák, Ph.D.,  
doc. Ing. Martin Pitoňák, Ph.D., Ing. Petr Trnka,  
prof. Ing. Pavel Novák, Ph.D.,  
NTIS – Nové technologie pro informační společnost,  
Fakulta aplikovaných věd,  
Západočeská univerzita v Plzni

### Abstrakt

Integrální transformace jsou užitečným matematickým aparátem a základem pro formulaci odhadů veličin tíhového pole včetně šíření chyb. Jedním z předpokladů integrálních transformací je globální datové pokrytí. Dostupnost pozemních měření je však obecně limitována. V praxi se globální integrál rozkládá na dvě oblasti – blízké a vzdálené zóny. Nezanedbatelný příspěvek dat ve vzdálené zóně vyžaduje přesné vyhodnocení. Za tímto účelem je v prostředí MATLAB vytvářena knihovna pro výpočet efektů vzdálené zóny u integrálních transformací pro derivace tíhového potenciálu až do třetího řádu. Příspěvek popisuje implementaci teoretických odvození efektů vzdálených zón a numerické testování knihoven.

### Implementation and Testing of Software Library for Calculation of the Far-Zone Effects for Spherical Integral Transformations

### Abstract

Integral transformations are a useful mathematical apparatus and mathematical basis for the formulation of integral estimators of gravity field parameters, including error propagation. One of the basic assumptions of integral transformations is the global data coverage. However, the availability of ground measurements is frequently limited. In practice, the global integral is divided into two regions, namely the near and far zones. Non-negligible effects of data in the far-zone require accurate evaluation. For this purpose, a new software library is being created in the MATLAB environment to calculate far-zone effects in integral transformations for gravitational potential derivatives up to the third order. This contribution discusses the implementation of theoretical equations describing far-zone effects and the subsequent numerical testing of the library functionality.

**Keywords:** gravity field modelling, far-zone effect, derivatives of the gravitational potential, boundary-value problems, spherical harmonic synthesis, global gravitational models, numerical integration

## 1. Úvod

Modelování tíhového pole Země a jiných těles má širokou škálu využití napříč geovědními obory od určování aproximací povrchu vesmírných těles (geoid/kvazigeoid pro Zemi, selenoid pro Měsíc, či areoid pro Mars) v geodézii, přes zjišťování rozložení hmot uvnitř planetárních těles v geologii a geofyzice nebo monitorování klimatických změn v klimatologii a meteorologii až po plánování drah raket ve vesmírném průmyslu [1].

Tíhové pole těles lze modelovat pomocí vícero metod. Mezi nejpoužívanější patří kolokace metodou nejmenších čtverců [2], radiální báze funkce [3], sférické harmonické funkce [4] nebo integrální transformace [5]. Každá z uvedených metod má své výhody i nevýhody.

V této studii se autoři rozhodli využít metodu integrálních transformací. Integrální transformace jsou již delší dobu v geodézii využívány pro výpočet tíhového potenciálu Země z měřených hodnot jeho derivací. Tato úloha má velký význam při určování výšek geoidu, respektive kvazigeoidu, nad referenčním elipsoidem pomocí Stokesovy [6] či Hotinovy [7] integrální transformace. Mezi výhody integrálních transformací v porovnání s dalšími zmiňovanými metodami patří snadná softwarová implementace bez nutnosti řešení inverze matic. Oproti tomu k nevýhodám patří zejména potřeba globálního datového pokrytí, přičemž dostupnost měřených dat je obecně geograficky omezena. Řešení této nevýhody spočívá v rozdělení glo-

bálního integrálu na takzvanou blízkou a vzdálenou zónu, které je podrobněji popsáno v části 2.

Příspěvek popisuje průběh experimentů, softwarovou implementaci a numerické testování přesnosti knihoven na výpočet vlivu vzdálených zón při určování hodnot prvních derivací (složky gradientu poruchového potenciálu) a druhých derivací (složky poruchového tíhového tenzoru druhého řádu) poruchového potenciálu v lokálním kartézském souřadnicovém systému z jeho prvních a druhých vertikálních derivací. Numerický experiment má za cíl ověřit funkčnost dosavadní programové implementace teoretických postupů porovnáním výstupů softwarové knihovny s výsledky spočtenými numerickou integrací. Vedle výpočetního experimentu je popsána i nezbytná teorie výpočtu vzdálených zón, na níž je experiment založen, a také průběh a současný stav tvorby softwarové knihovny v prostředí MATLAB [8].

Jako okrajová plocha (plocha, k níž se vztahují měření) byla použita střední geocentrická sféra s poloměrem 6 378 136,46 m. Na dané sféře byly z globálního modelu tíhového pole Země Tongji GMMG2021S [9] vygenerovány gridy poruchového tíhového potenciálu a jeho derivací. Vliv vzdálených zón při výpočtu prvních a druhých derivací poruchového tíhového potenciálu z jeho prvních a druhých vertikálních derivací byl testován na dráhách družice GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer, 2009–2013, [10]) probíhající nad Jižní Amerikou v září roku 2013.

Článek má následující strukturu: ve druhé části je stručně popsána teorie, třetí část se věnuje implementaci teorie do softwarové knihovny, ve čtvrté části je popsán numerický experiment ověřující přesnost softwarové knihovny a v páté části jsou zhodnoceny dosažené výsledky.

## 2. Teorie

Jak již bylo uvedeno, při aplikaci integrálních transformací je nutné brát v úvahu dostupnost měřených dat. Jelikož integrální transformace předpokládají globální datové pokrytí, je při jejich použití třeba kombinovat více druhů měření. Kombinaci provádíme na základě rozdělení okrajové plochy (zde střední sféry) na dvě komplementární oblasti, viz **obr. 1** vlevo. Rozdělení je provedeno určením polohy a velikosti zájmové oblasti. Takto je definována sférická kružnice na okrajové ploše. Velikost sférické kružnice je vymezena integračním poloměrem  $\psi_0$ . Oblast uvnitř sférické kružnice definuje takzvanou blízkou zónu. V blízké zóně jsou využívána lokální, zejména pozemní, tíhová měření nejčastěji ve formě tíhových anomálií nebo tíhových poruch. Vzdálenou zónou pak rozumíme doplňkovou oblast sféry, viz **obr. 1** vlevo. Ve vzdálené zóně využíváme globálních modelů tíhového pole Země odvozených z dat družicových misí. Výsledné hodnoty jsou pak počítány jako součet příspěvků blízké a vzdálené zóny, přičemž výpočet příspěvku každé ze zón probíhá odlišným způsobem.

Postup rozdělení globálního integrálu na blízkou a vzdálenou zónu je pro přehlednost popsán na Poissonově integrálu [11], jenž představuje řešení první okrajové úlohy a slouží pro výpočet poruchového tíhového potenciálu (rozdíl mezi tíhovým potenciálem  $W$  a jeho normální hodnotou  $U$  generovanou ekvipotenciálním elipsoidem) vně střední sféry z hodnot poruchového tíhového potenciálu na této sféře:

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_S T(R, \Omega') \mathcal{H}(t, u) d\omega, \quad (1)$$

kde  $T$  značí poruchový tíhový potenciál,  $(r, \Omega)$  jsou sférické geocentrické souřadnice výpočetního bodu ( $r$  je geocentrický průvodič výpočetního bodu a  $\Omega$  označuje sférické úhlové souřadnice výpočetního bodu  $\varphi$  a  $\lambda$ ),  $S$  značí integrační oblast,  $R$  je poloměr střední sféry,  $\mathcal{H}$  značí integrální jádro, útlumový faktor  $t$  je poměrem  $R/r$  a parametr  $u$  je definován jako  $\cos(\psi)$ , přičemž  $\psi$  značí sférickou vzdálenost mezi průvodičem výpočetního bodu a průvodičem integračního elementu. S využitím sférické vzdálenosti je zároveň definován zmiňovaný integrační poloměr  $\psi_0$ , který udává velikost blízké zóny,  $d\omega$  pak představuje integrační element. Situace je zobrazena na **obr. 1** vpravo, kde integrační oblast  $S_0$  představuje blízkou zónu a doplňková oblast  $S - S_0$  zónu vzdálenou.  $P$  je výpočetní bod se souřadnicemi  $(r, \Omega)$  a průmětem na sféru  $P'(R, \Omega)$ ,  $O$  značí střed integračního elementu se souřadnicemi na sféře  $(R, \Omega')$ .

Je třeba si uvědomit, že teoreticky je možné určit jakoukoliv z derivací poruchového tíhového potenciálu opět pomocí této nebo jakékoliv jiné derivace. Při odvozování teoretických vztahů bylo tedy třeba nejdříve odvodit vztahy popisující výpočet integrálních jader pro všechny derivace. Tyto vztahy byly odvozeny ve spektrálním tvaru [5]. Spektrální tvar integrálních jader má formu rozvoje do řady Legendreových funkcí:

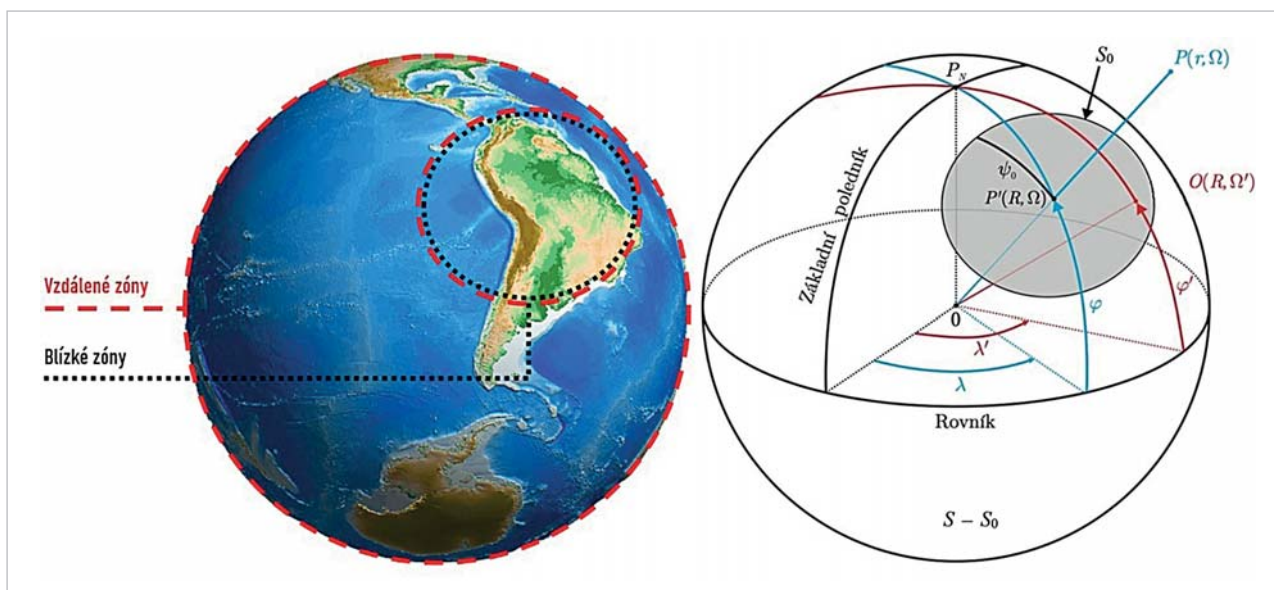
$$\mathcal{H}(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n(n+1)} (2n+1) P_{n,0}(u), \quad (2)$$

kde  $P_{n,0}$  je Legendreova funkce stupně  $n$ . Výhodou spektrálního tvaru je možnost filtrace signálu omezením řady do určitého stupně.

Z praktických důvodů popsaných výše byly dále vztahy vyjádřeny jako součet vlivu blízkých a vzdálených zón:

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} T(R, \Omega') \mathcal{H}(t, u) d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{S-S_0} T(R, \Omega') \mathcal{H}(t, u) d\omega, \quad (3)$$

kde první integrál představuje vliv blízkých zón a druhý vliv zón vzdálených. Příspěvek vzdálených zón v případě



Obr. 1 Rozdělení sféry na blízkou a vzdálenou zónu (vlevo) a určení velikosti zón na základě integračního poloměru (vpravo); podkladový obrázek vlevo byl generován pomocí skriptu rotating\_3D\_globe [12]

Poissonovy integrální transformace počítáme pomocí sférické harmonické řady, kde  $k$  je řád vertikální derivace:

$$\delta T(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{[k],n}^u(t, u_0) T_{[k],n}(R, \Omega), \quad (4)$$

kde na pravé straně (4) vystupují spektrální koeficienty (popřípadě Moloděnského koeficienty či spektrální váhy):

$$Q_{[k],n}(t, u_0) = \int_{-1}^{u_0} \mathcal{H}_{[k]}^-(t, u) P_{n,0}(u) du, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

a hodnoty poruchového tíhového potenciálu, které lze vypočítat dle následujícího vztahu:

$$T_{[k],n}(R, \Omega) = (-1)^k \frac{GM}{a^{k+1}} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+k+1} \frac{(n+k)!}{n!} \sum_{m=-n}^{+n} \Delta \bar{C}_{(n,m)} \bar{Y}_{(n,m)}(\Omega). \quad (6)$$

Jednotlivé symboly v předchozí rovnici jsou definovány následovně:  $GM$  a  $a$  jsou parametry globálního modelu tíhového pole Země, tj. geocentrická gravitační konstanta a poloměr referenční sféry,  $\Delta \bar{C}_{(n,m)}$  jsou normované sférické harmonické koeficienty stupně  $n$  a řádu  $m$  a  $\bar{Y}_{(n,m)}$  jsou normované plošné sférické harmonické funkce.

Příklady výpočtu příspěvků vzdálených zón pro derivace poruchového tíhového potenciálu 1. a 2. řádu jsou zobrazeny ve formě vztahů (7) a (8):

$$\delta T_o(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-1}}{4\pi} \int_{s-s_0}^{s_0} T_{[k]}(R, \Omega') \Delta \mathcal{H}_{[k]}^o(t, u, u_0, a) d\omega, \quad o \in \{x, y, z\}, \quad (7)$$

$$\delta T_{op}(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-2}}{4\pi} \int_{s-s_0}^{s_0} T_{[k]}(R, \Omega') \Delta \mathcal{H}_{[k]}^{op}(t, u, u_0, a) d\omega, \quad o, p \in \{x, y, z\}, \quad (8)$$

kde indexy  $o$  a  $p$  a jejich kombinace představují danou derivaci, kdy konkrétní značení je  $x$  a  $y$  pro horizontální a  $z$  pro vertikální derivace,  $\Delta \mathcal{H}$  je takzvané chybové jádro,  $u_0$  je rovno  $\cos(\psi_0)$  a  $a$  značí azimut mezi výpočetním bodem a integračním elementem.

Konkrétní vztahy pro výpočet složek gradientu poruchového tíhového potenciálu ( $T_x, T_y, T_z$ ) a složek poruchového tíhového tenzoru druhého stupně ( $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{xy}, T_{yz}, T_{xz}$ ) z vertikální složky gradientu  $T_z$  a vertikální složky poruchového tíhového tenzoru druhého stupně  $T_{zz}$  jsou uvedené v příloze A. První a druhé vertikální derivace byly jako měřené hodnoty na povrchu střední sféry vybrány záměrně. První vertikální derivace lze vypočítat z měření tíhového zrychlení, které se vykonává pomocí absolutních a relativních gravimetrů. Relativní gravimetry lze použít také pro měření druhých vertikálních derivací.

### 3. Tvorba softwarové knihovny

Implementace teorie prezentované v části 2 do softwarové knihovny probíhala v prostředí MATLAB ve formě skriptů a funkcí slučovaných do příslušných adresářů. Ukázka výstupů tvorby knihovny je na obr. 2. Zpracování ve formě GUI není z důvodu specifického určení výstupů pro odbornou komunitu plánováno.

Knihovna umožňuje výpočet vlivu vzdálené zóny pro poruchový tíhový potenciál a dále pro jeho derivace prvního až třetího řádu z diskretních hodnot poruchového tíhového potenciálu a jeho vertikálních derivací opět až do třetího řádu, viz obr. 3. Pro gradient poruchového tíhového potenciálu (vektor tíhové poruchy), jsou počítány jeho 3 složky v lokálním kartézském souřadnicovém systému, prvky značíme  $T_x$  a  $T_y$  pro horizontální derivace a  $T_z$  pro derivaci vertikální.  $T_z^y$  je tedy velikost tíhové poruchy ve směru radiálního průvodiče vedeného měřeným bodem, zatímco při přičtení horizontálních složek získáme celkovou tíhovou poruchu v daném místě ztotožněnou se

#### Příloha A Vztahy pro výpočet příspěvků vzdálených zón pro první a druhé derivace poruchového tíhového potenciálu

$$\delta T_x(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{[k],n}^u(t, u_0) \frac{\partial T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \varphi}, \quad (A.1)$$

$$\delta T_y(r, \Omega) = -(-1)^k \frac{R^{k-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{[k],n}^u(t, u_0) \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \lambda}, \quad (A.2)$$

$$\delta T_z(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-1}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{[k],n}^t(t, u_0) T_{[k],n}(R, \Omega), \quad (A.3)$$

$$\delta T_{xx}(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Q_{[k],n}^{tt}(t, u_0) T_{[k],n}(R, \Omega) + Q_{[k],n}^{uu}(t, u_0) \right\} \times \left[ n(n+1) T_{[k],n}(R, \Omega) + 2 \frac{\partial^2 T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \varphi^2} \right], \quad (A.4)$$

$$\delta T_{xy}(r, \Omega) = -(-1)^k \frac{R^{k-2}}{\cos \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{[k],n}^{uu}(t, u_0) \left[ \tan \varphi \frac{\partial T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \lambda \partial \varphi} \right], \quad (A.5)$$

$$\delta T_{xz}(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{[k],n}^{tu}(t, u_0) \frac{\partial T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \varphi}, \quad (A.6)$$

$$\delta T_{yy}(r, \Omega) = (-1)^k \frac{R^{k-2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Q_{[k],n}^{tt}(t, u_0) T_{[k],n}(R, \Omega) - Q_{[k],n}^{uu}(t, u_0) \right\} \times \left[ n(n+1) T_{[k],n}(R, \Omega) + 2 \frac{\partial^2 T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \varphi^2} \right], \quad (A.7)$$

$$\delta T_{yz}(r, \Omega) = -(-1)^k \frac{R^{k-2}}{2 \cos \varphi} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{[k],n}^{tu}(t, u_0) \frac{\partial T_{[k],n}(R, \Omega)}{\partial \lambda}, \quad (A.8)$$

$$\delta T_{zz}(r, \Omega) = -(-1)^k R^{k-2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{[k],n}^{tt}(t, u_0) T_{[k],n}(R, \Omega). \quad (A.9)$$

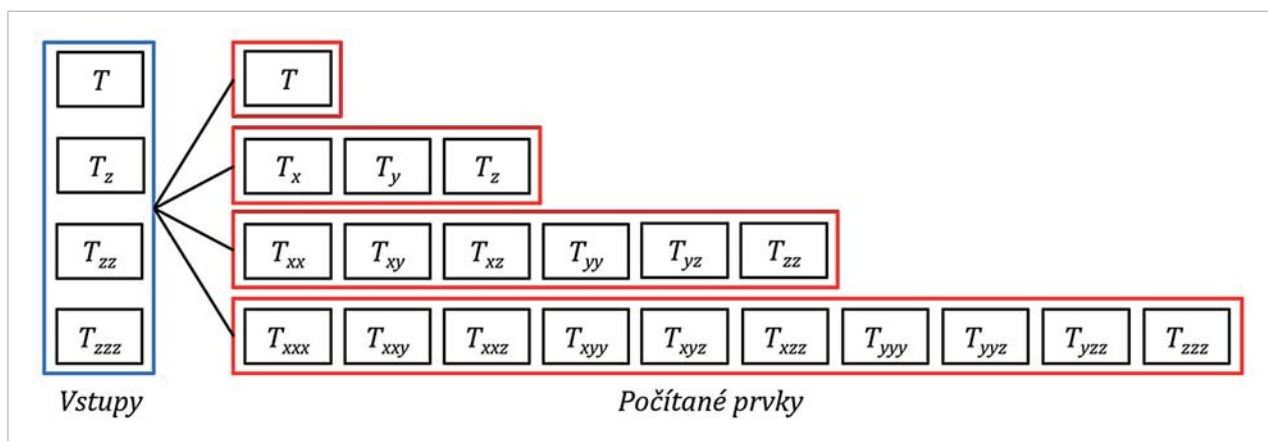
```

120 - for m=nmax:-1:0
121 -     [plm plm1 plm2 lde] = plmmat012(m, nmax, rad2deg(th));
122 -     Lm1=-plm.*amp11(:, (m+1):end);
123 -     Lm2=plm1.*amp12(:, (m+1):end);
124 -     Cm=C(z:k).*m;
125 -     Sm=S(z:k).*m;
126 -     z=z-nmaxGGM+m-2;
127 -     k=z+nmax-m+1;
128 -
129 -     %Lumped coefficients
130 -     A1(:, m+1)=Lm1*Cm;
131 -     B1(:, m+1)=Lm1*Sm;
132 -     A2(:, m+1)=Lm2*Cm;
133 -     B2(:, m+1)=Lm2*Sm;
134 - end
135 -
136 -     cosla=cos([0:nmax]*lambda');
137 -     sinla=sin([0:nmax]*lambda');
138 -
139 -     %Calculation of surface spherical harmonics
140 -     f=-A1*sinla+B1*cosla-A2*sinla+B2*cosla;
141 -     f1=GM./R.^4.*f;
142 -
143 -

```

shsyn_fun_T_Q	Q00n	Qtu00n
shsyn_fun_Tx_Q	Q01n	Qtu01n
shsyn_fun_Txx_Q	Q02n	Qtu02n
shsyn_fun_Txxx_Q	Q03n	Qtu03n
shsyn_fun_Txy_Q	Qt00n	Qtuu00n
shsyn_fun_Txz_Q	Qt01n	Qtuu01n
shsyn_fun_Txyy_Q	Qt02n	Qtuu02n
shsyn_fun_Txyz_Q	Qt03n	Qtuu03n
shsyn_fun_Tzz_Q	Qtt00n	Qu00n
shsyn_fun_Tzxx_Q	Qtt01n	Qu01n
shsyn_fun_Tzxy_Q	Qtt02n	Qu02n
shsyn_fun_Tzxyy_Q	Qtt03n	Qu03n
shsyn_fun_Tzyy_Q	Qttt00n	Quu00n
shsyn_fun_Tzyyz_Q	Qttt01n	Quu01n
shsyn_fun_Tzyzz_Q	Qttt02n	Quu02n
shsyn_fun_Tzzz_Q	Qttt03n	Quu03n
shsyn_fun_Tzzxx_Q	Qttu00n	Quuu00n
shsyn_fun_Tzzxy_Q	Qttu01n	Quuu01n
shsyn_fun_Tzzxyy_Q	Qttu02n	Quuu02n
shsyn_fun_Tzzzz_Q	Qttu03n	Quuu03n

Obr. 2 Ukázka vybraného kódu a jednotlivé skripty softwarové knihovny



Obr. 3 Transformace složek v testované části softwarové knihovny

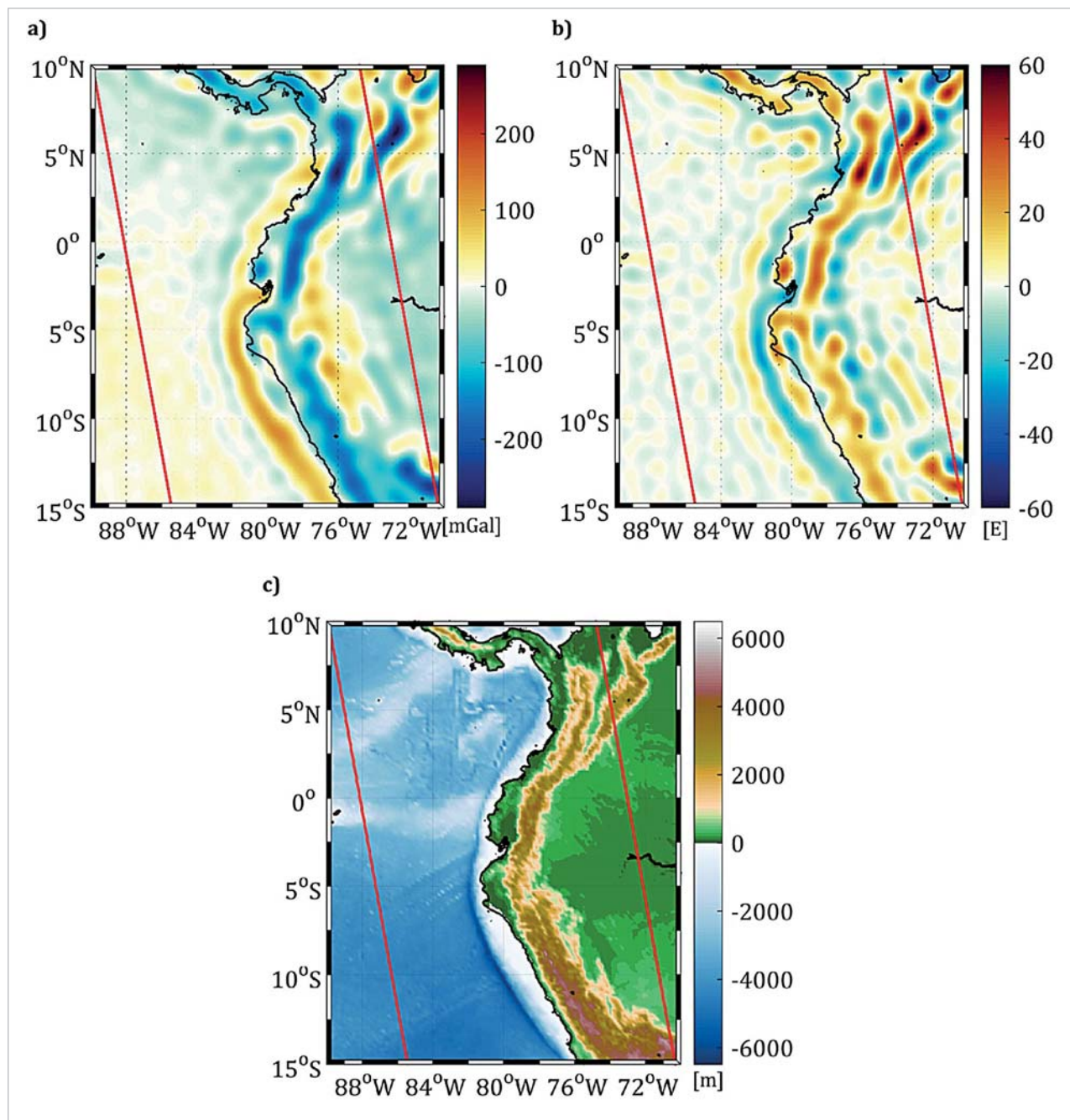
směrem svislice v bodě. Poruchový tíhový tenzor druhého řádu obsahuje již 9 složek, ale jelikož je symetrický, stačí uvažovat pouze 6 složek. Analogicky poruchový tíhový tenzor třetího řádu obsahuje 27 složek a s uvážením symetrie stačí uvažovat pouze 10 složek. Během experimentu byla testována pouze část knihovny, v níž jsou poruchový potenciál a jeho derivace 1. až 3. řádu počítány z poruchového potenciálu a jeho vertikálních derivací opět až do 3. řádu.

Do knihovny byly nejdříve zapracovány výpočty spektrálních koeficientů. Ukázka jednoho z těchto koeficientů je uvedena v rovnici (5). Následně byly implementovány vztahy pro výpočet příspěvku vzdálené zóny u jednotlivých derivací pomocí sférické harmonické syntézy. Ukázka pro Poissonův integrál je reprezentována v rovnici (4) a kompletní vztahy pro výpočet příspěvků vzdálených zón pro první a druhou derivaci jsou uvedeny v příloze A. Pozorný čtenář si jistě povšimne, že v knihovně je navíc implementován výpočet vlivu vzdálených zón na poruchový tíhový potenciál a jeho třetí derivace z poruchového tíhového potenciálu a jeho třetí vertikální derivace. Kompletní teorii výpočtu příspěvku vzdálených zón se autoři pro pře-

hlednost rozhodli v příspěvku vynechat a soustředili se pouze na aktuálně prakticky měřené a počítané veličiny, jelikož třetí derivace tíhového potenciálu jsou v současnosti měřeny pouze v laboratorních podmínkách.

#### 4. Numerický experiment

Numerickou přesnost a správnost jednotlivých skriptů v rámci softwarové knihovny bylo potřebné otestovat pomocí nezávislého výpočtu. Ten byl reprezentován výpočtem příspěvku vzdálených zón pro jednotlivé integrální transformace metodou numerické integrace. Jako testovací oblast byl vybrán severní region Jižní Ameriky, viz obr. 4. Testovací body byly reprezentovány ve formě dvou segmentů drah družice GOCE ze září roku 2013 z produktu EGG\_TRF\_2 [13], kdy družice sestupovala a byla nejbližší zemskému povrchu. Dohromady tyto části drah obsahují 750 výpočetních bodů, tedy 375 bodů na jednu dráhu. Výběr drah proběhl s ohledem na členitost terénu zájmového území, přičemž první dráha prochází nad Tichým oceánem



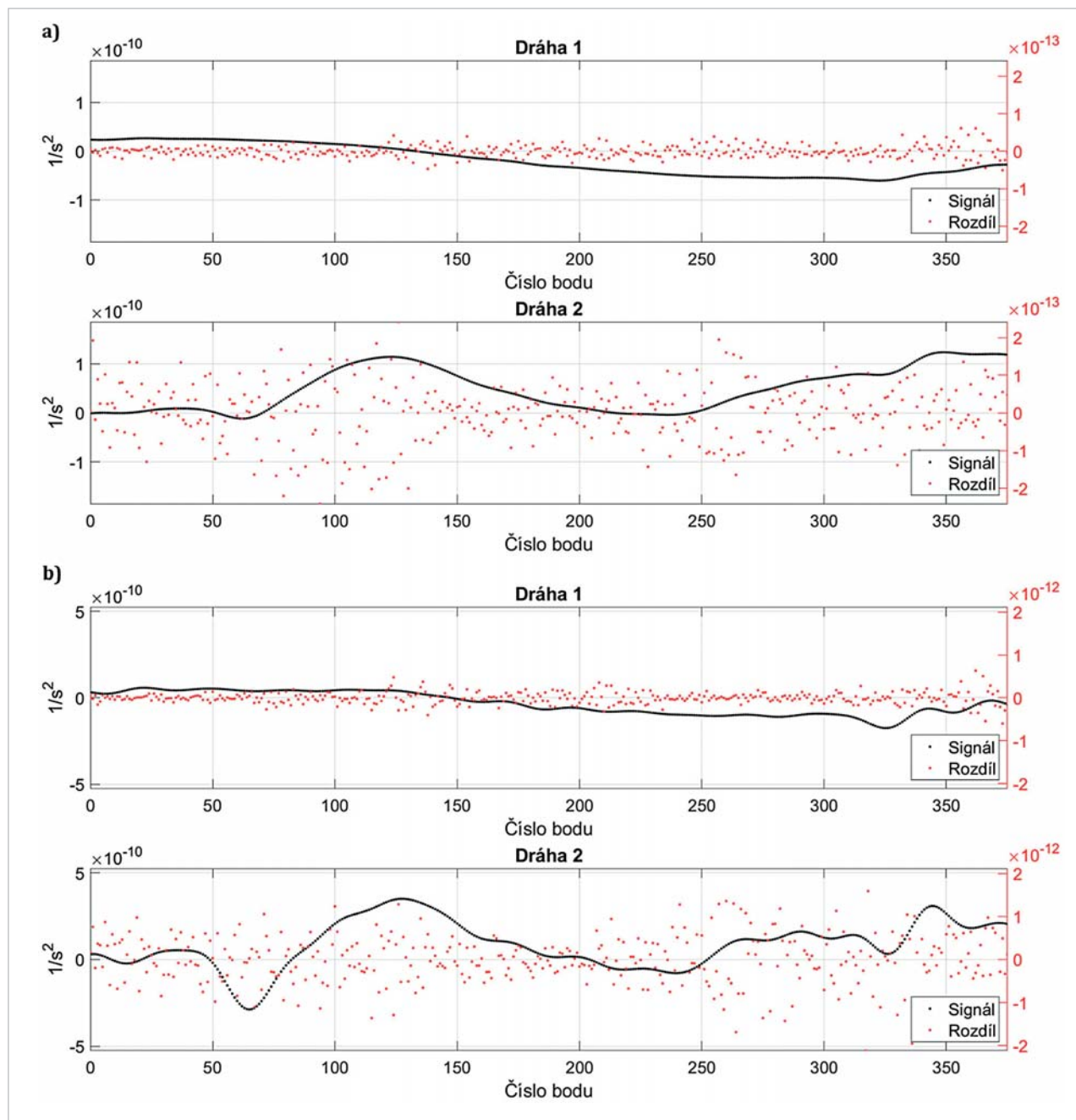
Obr. 4 První (a) a druhá (b) vertikální derivace poruchového tíhového potenciálu, topografie a batymetrie z modelu Earth2014 (c) na testovacím území

a druhá přes členitý horský terén And v severozápadní části Jižní Ameriky. Vybrané segmenty drah včetně topografie a batymetrie a dále prvních a druhých vertikálních derivací poruchového tíhového potenciálu z globálního modelu tíhového pole Země Tongji GMMG2021S jsou na obr. 4.

Experiment spočíval v porovnání výsledků získaných ze softwarové knihovny (počítaných pomocí sférické harmonické syntézy) s výsledky získanými řešením příspěvků vzdálených zón metodou numerické integrace. Pro výpočet numerickou integrací byla vygenerována vstupní data z globálního modelu tíhového pole Země Tongji GMMG2021S ve formě globálních gridů s prostorovým rozlišením  $0,2^\circ$  a  $0,05^\circ$ . Pomocí těchto gridů byly následně numerickou

integrací spočítány hodnoty příspěvků vzdálených zón pro jednotlivé derivace na všech 750 výpočetních bodech. Tytéž hodnoty byly určeny metodou sférické harmonické syntézy, viz rovnice (A1) - (A9), počítanou skripty ze softwarové knihovny. Tímto způsobem byl oběma metodami určen příspěvek vzdálených zón pro všechny testované body s uvažovanými integračními poloměry  $5^\circ$  a  $20^\circ$ . Následně byly určeny rozdíly mezi oběma výstupy.

Základním ukazatelem při testování správnosti výsledků byl poměr rozdílu mezi výsledky získanými metodou sférické harmonické syntézy a metodou numerické integrace se signálem získaným výpočtem pomocí sférické harmonické syntézy (předpoklad vyšší přesnosti) a jeho změny při úpravě parametrů výpočtů.



Obr. 5 Ukázka příspěvků vzdálených zón pro derivaci  $T_{z_z}$  určenou z první (a) a druhé (b) vertikální derivace poruchového tíhového potenciálu

## 5. Testování výsledků

Graficky je k dispozici ukázka výsledků testování pro složku  $T_{z_z}$  na obr. 5. V číselné podobě jsou zobrazeny výsledky výpočtů pro všechny derivace prvního (tab. 1) a druhého (tab. 2) řádu počítané z první ( $T_z$ ) a druhé ( $T_{z_z}$ ) vertikální derivace poruchového tíhového potenciálu.

Pro numerickou integraci byl nakonec využit grid s krokem  $0,05^\circ$ . Při testování dat pro grid  $0,2^\circ$  výsledky vykazovaly větší rozdíly vlivem chyb z diskretizace integrální transformace. Při zvýšení rozlišení gridu na  $0,05^\circ$  došlo ke zmenšení rozdílů přibližně o jeden řád oproti gridu  $0,2^\circ$ , viz tab. 1 a 2. Porovnáním výsledků pro grid  $0,2^\circ$  a  $0,05^\circ$  v tabulkách se lze přesvědčit o zmiňovaném zlepšení

výsledků o jeden řád. V tabulkách jsou zobrazeny průměrné velikosti signálů daných složek spočítaných sférickou harmonickou syntézou (v tabulkách označeno jako „signál“), dále byly vypočteny směrodatné odchylky rozdílů mezi signálem spočítaným formou syntézy a signálem spočítaným numerickou integrací (v tabulkách jako „rozdíl“), a nakonec poměr mezi těmito odchylkami a signálem samotným (v tabulkách „poměr“). Všechny hodnoty byly počítány zvláště pro poloměry blízkých zón  $5^\circ$  a  $20^\circ$ .

Poměr rozdílů mezi syntézou a numerickou integrací a signálem spočítaného pomocí syntézy obecně stoupá s řádem vertikální derivace od setin procenta po maximálně jednotky procent. Minimální poměr rozdílů a signálu činí  $0,10\%$  pro grid  $0,2^\circ$  a  $0,01\%$  pro grid  $0,05^\circ$  (složka  $T_{z_z}$

Tab. 1 Číselné výsledky porovnání pro derivace poruchového tíhového potenciálu 1. řádu

Integrační poloměr		$\psi_0 = 5^\circ$		$\psi_0 = 20^\circ$		
Výpočet z		$T_z$	$T_{zz}$	$T_z$	$T_{zz}$	
$T_x$ [mGal]	Signál (syntéza)		5,7808	6,8285	3,2583	5,1293
	Rozdíl	grid 0,2°	0,0218	0,1465	0,0033	0,0793
		grid 0,05°	0,0027	0,0167	0,0004	0,0093
	Poměr	grid 0,2°	0,38 %	2,15 %	0,10 %	1,55 %
		grid 0,05°	0,05 %	0,24 %	0,01 %	0,18 %
$T_y$ [mGal]	Signál (syntéza)		6,7727	8,1765	0,9074	1,4742
	Rozdíl	grid 0,2°	0,0220	0,1444	0,0020	0,0476
		grid 0,05°	0,0027	0,0178	0,0002	0,0059
	Poměr	grid 0,2°	0,33 %	1,77 %	0,22 %	3,23 %
		grid 0,05°	0,04 %	0,22 %	0,03 %	0,40 %
$T_z$ [mGal]	Signál (syntéza)		2,3155	6,5464	0,2812	3,8460
	Rozdíl	grid 0,2°	0,0128	0,2515	0,0005	0,0769
		grid 0,05°	0,0017	0,0317	0,0001	0,0083
	Poměr	grid 0,2°	0,55 %	3,84 %	0,17 %	2,00 %
		grid 0,05°	0,07 %	0,48 %	0,02 %	0,22 %

počítaná z  $T_z$ ), zatímco maximální poměr rozdílu a signálu pro celou sadu testovaných veličin činí 5,52 % pro grid 0,2° a 0,71 % pro grid 0,05° (složka  $T_{xx}$  počítaná z  $T_{zz}$ ).

Další zkoumanou závislostí byl vliv velikosti integračního poloměru na výsledný signál. Dle předpokladu se velikost signálu se zvýšením integračního poloměru zmenšuje, jelikož omezuje velikost vzdálené zóny, a tím i její příspěvek. Zároveň se zvětšením integračního poloměru obecně snižuje rozdíl mezi signálem ze syntézy a z numerické integrace, což je však opět způsobeno pouze zmenšením celkového příspěvku vzdálené zóny. Na relativní přesnost výpočtů tedy nemá velikost integračního poloměru výrazný vliv, jak lze pozorovat i ve formě číselných výstupů v tab. 1 a 2.

Na obr. 5 je černě zobrazen signál získaný formou sférické harmonické syntézy a červeně rozdíl mezi tímto signálem a signálem získaným numerickou integrací. Lze pozorovat, že rozdíl je oproti samotnému signálu o 2 až 3 řády menší. Tento interval velikosti rozdílu platí pro všechny zkoumané složky. Z výsledků je patrný nárůst rozdílu

mezi syntézou a výsledky určenými numerickou integrací v závislosti na řádu vertikální derivace poruchového tíhového potenciálu, ze které je daná složka počítána. Dále je v výsledcích patrný rozdílný průběh signálu u dráhy s nízkou členitostí terénu (nad oceánem) a dráhy s vysokou členitostí terénu (nad pevninou).

Lze předpokládat, že výrazná část rozdílu je i po zvětšení rozlišení gridu nadále tvořena chybami z diskretizace integrační transformace. Porovnání i přesto vykazuje vysokou míru podobnosti a lze konstatovat, že s uvážením již zmíněných skutečností si výsledky získané formou syntézy a numerické integrace odpovídají. V průběhu experimentu byla tedy ověřena funkčnost části softwarové knihovny zaměřené na výpočty poruchového tíhového potenciálu a všech jeho derivací až do 3. řádu z poruchového tíhového potenciálu a jeho vertikálních derivací až do 3. řádu. V článku byly znázorněny výsledky pouze pro první a druhé derivace poruchového tíhového potenciálu z důvodu jejich praktické dostupnosti pomocí gravimetrických a gradiometrických měření.

Tab. 2 Číselné výsledky porovnání pro derivace poruchového tíhového potenciálu 2. řádu

Integrační poloměr		$\psi_0 = 5^\circ$		$\psi_0 = 20^\circ$		
Výpočet z		$T_z$	$T_{zz}$	$T_z$	$T_{zz}$	
$T_{xx}$ [mE]	Signál (syntéza)		71,204	45,102	2,524	9,180
	Rozdíl	grid 0,2°	0,581	2,489	0,029	0,370
		grid 0,05°	0,076	0,319	0,003	0,036
	Poměr	grid 0,2°	0,82 %	5,52 %	1,15 %	4,03 %
		grid 0,05°	0,11 %	0,71 %	0,12 %	0,40 %
$T_{xy}$ [mE]	Signál (syntéza)		59,026	61,392	9,857	16,551
	Rozdíl	grid 0,2°	0,366	1,436	0,015	0,282
		grid 0,05°	0,046	0,1,80	0,002	0,035
	Poměr	grid 0,2°	0,62 %	2,34 %	0,16 %	1,70 %
		grid 0,05°	0,08 %	0,29 %	0,02 %	0,21 %
$T_{xz}$ [mE]	Signál (syntéza)		42,547	95,838	7,610	27,512
	Rozdíl	grid 0,2°	0,450	3,681	0,010	0,543
		grid 0,05°	0,055	0,418	0,001	0,064
	Poměr	grid 0,2°	1,06 %	3,84 %	0,13 %	1,97 %
		grid 0,05°	0,13 %	0,44 %	0,01 %	0,23 %
$T_{yy}$ [mE]	Signál (syntéza)		25,246	65,198	9,320	8,416
	Rozdíl	grid 0,2°	0,572	2,579	0,018	0,423
		grid 0,05°	0,077	0,308	0,002	0,041
	Poměr	grid 0,2°	2,26 %	3,96 %	0,20 %	5,03 %
		grid 0,05°	0,30 %	0,47 %	0,02 %	0,48 %
$T_{yz}$ [mE]	Signál (syntéza)		47,925	99,472	2,905	11,505
	Rozdíl	grid 0,2°	0,455	3,630	0,006	0,326
		grid 0,05°	0,057	0,447	0,001	0,040
	Poměr	grid 0,2°	0,95 %	3,65 %	0,21 %	2,83 %
		grid 0,05°	0,12 %	0,45 %	0,03 %	0,35 %
$T_{zz}$ [mE]	Signál (syntéza)		63,360	54,837	10,883	2,786
	Rozdíl	grid 0,2°	0,262	2,146	0,020	0,081
		grid 0,05°	0,034	0,270	0,002	0,009
	Poměr	grid 0,2°	0,41 %	3,91 %	0,18 %	2,91 %
		grid 0,05°	0,05 %	0,49 %	0,02 %	0,32 %



**6. Závěr**

V článku byla popsána část projektu zaměřená na výpočet příspěvku vzdálených zón při integrální transformaci poruchového tíhového potenciálu a jeho vertikálních derivací na poruchový potenciál a všechny jeho derivace až do třetího řádu pomocí sférické harmonické syntézy, přičemž příspěvek vzdálené zóny tvoří jednu ze dvou složek této transformace.

Pro umožnění výpočtů byla v rámci projektu zpracována nová teorie, jelikož část užívaných vztahů nebyla dosud odvozena. Tato teorie byla následně implementována do kódů uložených v nové softwarové knihovně. Tvorba softwarové knihovny probíhala formou vytváření funkcí a skriptů v prostředí MATLAB a jejich slučování do funkčních celků v jednotlivých adresářích. V současnosti již byla dokončena kompletace a testování jednotlivých částí knihovny.

V článku byl popsán experiment ověřující funkčnost části vytvořené knihovny zaměřené na výpočet příspěvku vzdálených zón pro integrální transformace poruchového tíhového potenciálu a jeho vertikálních derivací. Pro experiment byla využita data dvou segmentů dráhy družice GOCE a globální syntetický model tíhového pole Země Tongji GMMG2021S. Správnost výsledků byla ověřena porovnáním výstupů určených pomocí sférické harmonické syntézy s výstupy spočítanými numerickou integrací. Během experimentu byl zjišťován vliv změny vybraných parametrů výpočtů na výsledky a byla zhodnocena celková přesnost a správnost implementace softwarové knihovny. Zhodnocení výsledků proběhlo v grafické i numerické podobě pro všechny složky. Analýzou výsledků byla zjištěna dostatečná přesnost výpočtu a potvrzena správnost teoretických odvození a jejich implementace.

V současné době byla dokončena i implementace části knihovny zaměřené na výpočty s užitím horizontálních derivací poruchového tíhového potenciálu. Dále je plánováno odvození šíření chyb měřených veličin a bezplatné zpřístupnění kompletní knihovny vědecké veřejnosti.

**Poděkování:**

*Práce vznikla díky podpoře projektu Grantové agentury České republiky č. 23-0731S. Jiří Belinger byl podpořen prostředky na specifický výzkum na vysokých školách, projekt SGS-2022-027. Výpočetní zdroje byly poskytnuty projektem e-INFRA (ID:90254), podpořeným Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.*

**LITERATURA:**

- [1] ANGERMANN, D.-PAIL, R.-SEITZ, F.-HUGENTOBLE, U.: Mission Earth (Geodynamics and Climate Change Observed Through Satellite Geodesy). Berlin, Německo, Springer, 2022, p. 246.
- [2] MORITZ, H.: Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980, p. 500.
- [3] FREEDEN, W.-MICHEL, V.: Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience). Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 2004, p. 534.
- [4] COLOMBO, O. L.: Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. Department of Geodetic Science, The Ohio State University, 1981, p. 140.
- [5] NOVÁK, P.-ŠPRLÁK, M.-TENZER, R.-PITOŇÁK, M.: (2017) Integral formulas for transformation of potential field parameters in geosciences. Earth-Science Reviews 164, 2017, 1, pp. 208-231.
- [6] STOKES, G. G.: On the variation of gravity on the surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, 1849, pp. 672-695.
- [7] HOTINE, M.: Mathematical geodesy. ESSA Monographs No. 2, Washington DC, USA, US Department of Commerce, 1969, p. 432.
- [8] THE MATHWORKS INC.: MATLAB version: 9.4.0.813654 (R2018b), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>.
- [9] CHEN, Q.-SHEN, Y.-FRANCIS, O.-CHEN, W.-ZHANG, X.-HSU, H.: Tongji-grace02s and Tongji-grace02k: High-Precision Static GRACE-only Global Earth's Gravity Field Models Derived by Refined Data Processing Strategies. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 123, 2018, 7, pp. 611-613.
- [10] ESA: Gravity field and steady-state ocean circulation. Technical report, Reports for Mission Selection – The Four Candidate Earth Explorer Core Missions, ESA SP-1233(1), 1999.
- [11] KELLOGG, O. D.: Foundation of potential theory. Springer Berlin, Heidelberg, 1929, p. 384.
- [12] BEZDĚK, A.-SEBERA, J.: MATLAB script for 3D visualizing geodata on a rotating globe. Computers & geosciences 56, 2013, pp. 127-130.
- [13] EGG-C: GOCE L2 product data handbook. Issue 4, Revision 3, GO-MA-HP-FGS-0110, The European GOCE Gravity Consortium EGG-C, 2010.
- [14] HIRT, C.-REXER, M.: Earth2014: 1 arc-min shape, topography, bedrock and ice-sheet models – available as gridded data and degree-10,800 spherical harmonics, International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation 39, 2015, pp. 103-112.

Do redakce došlo: 28. 10. 2023

**Lektoroval:**

**prof. Ing. Juraj Janák, PhD.,  
Katedra globálnej geodézie a geoinformatiky,  
Stavebná fakulta STU v Bratislave**